ゲーデルと
20世紀の論理学(ロジック)

田中一之［編］

❹

集合論とプラトニズム

東京大学出版会

Gödel and Logic in the 20th Century ④
Set Theory and Gödel's Platonism
Kazuyuki TANAKA, Editor
University of Tokyo Press, 2007
ISBN978-4-13-064098-5

刊行にあたって

今年 2006 年は，ゲーデルの生誕 100 年にあたる．19 世紀半ばのブールの仕事を近代論理学の出発点とみなすと，現在まで約 150 年の歴史のちょうど中間辺りで，20 代半ばの青年ゲーデルが不完全性定理を証明し，論理学（ロジック）に革命的転回をもたらしたことになる．

『TIME』誌が発表した 20 世紀の偉大な科学者・思想家 20 人（組）に，アインシュタイン，フロイト，ライト兄弟らと並んで，ゲーデル，そして論理学（ロジック）に関係の深いテューリングとウィトゲンシュタインが選ばれた．近隣分野から 3 人も名を連ねたことは，20 世紀の科学や思想の発展に論理学革命がいかに重要な役割を担い，またそれがいかに高く評価されているかを示している．

現代論理学の発展に寄与した人たちの多くは数学者である．ゲーデルは言わずもがな，ウィトゲンシュタインも流体力学という数学に近い分野から出発している．したがって，現代論理学の議論は否応なく数学的なのだが，数学の一分野に収まっているわけではない．ゲーデル自身，後半生は主に哲学を研究し，クワインやクリプキのように哲学サイドに立ちながら数理論理学に大きく貢献している研究者も少なくない．20 世紀の論理学（ロジック）の特徴はまさにこのような文理融合にあるのだが，このダイナミズムが文系・理系を分けたがる日本固有の文化のもとで敬遠や誤解を生む要因になっているとすれば大変残念である．また，この分野を「数学基礎論」と呼ぶ慣習が，わが国の論理学（ロジック）の健全な発展を妨げていると指摘する声があることも付言しておく．

本シリーズは，ゲーデルの生誕 100 年を記念し，彼の仕事を基点に 20 世紀の論理学（ロジック）の歩みを振り返り，公平な歴史認識のもとで，現代論理学の核となる概念や事実を立体的かつビビッド (vivid) に解き明かそうという試みで

企画された．そのため，数学と哲学の両面から解説を与えるという編集方針をまず打ち立てた．幸いなことに両陣営からご理解を得て，各分野の第一人者に執筆をお引き受けいただいた．前代未聞ともいえるこの試みが成功しているかいないかは読者諸賢の判断に委ねるしかないが，本シリーズの刊行を機縁に，論理学（ロジック）周辺のさまざまな分野の間に新しい対話が生まれることになれば，編者としてこれにまさる喜びはない．

すでに論理学（ロジック）について一通りの知識をお持ちの方にも，初めてふれる方にも興味をもって読んでいただけるように記述を工夫しているが，なかでも次世代を担う若い人たちには，全巻を読みこなし，広い視野と正しい認識をもつ新時代のロジシャンになっていただきたい．そしていつか「21 世紀のロジック」について，立派なシリーズが刊行されることを期待したい．

2006 年 6 月　編　者

はじめに

シリーズ完結となる本巻では，ゲーデルの集合論とプラトニズムについての検証を行う．ゲーデルといえば，完全性定理と（二つの）不完全性定理があまりにも有名であるが，彼がこれらを研究していた主要な時期は，1929 年から 30 年までの 2 年間にすぎない．彼のライフワークとなるのは連続体仮説を中心とする集合論の研究であり，上述の定理やそれ以外の仕事も集合論と一つにつながることで，20 世紀の学問分野「ロジック」が誕生する．

集合論を創始したカントルは，実数（連続体）と自然数（可算無限）が 1 対 1 に対応付けられない（濃度が異なる）ことを証明したあと，その二つの間に中間的な濃度は存在しないことを予想した．1900 年の国際数学者会議で，ヒルベルトはこれを，「正しそうだがいまだに証明がみつからない命題」として紹介した．それから 4 半世紀を経ても解決の糸口が見つからないこの問題に対し，ヒルベルトは，自ら開発した「証明論」を用いて挑戦したが，不成功に終わった．

このヒルベルトの挑戦をゲーデルが知ったのは，不完全性定理の発見とほぼ同じ頃であるといわれている．本シリーズ第 3 巻の序でも述べたが，不完全性定理の論文には，彼がのちに連続体仮説の相対無矛盾性の証明に用いるアイデアがすでに書かれているのである（脚注 48a）．ヒルベルトは，数学の命題を有限的「内容」を伴うリアルなものと，超越的で「内容」を欠いたイデアルなものに二分した．連続体仮説はイデアルな命題であるが，公理論的手法の成熟によって，リアルな議論で真偽の判定が可能であるとヒルベルトは考えた．ゲーデルの不完全性定理はその方法論の限界を示したものであるが，当初ゲーデル自身はこれを修正できると考えた．それがいわゆる「ゲー

デルのプログラム」である．このプログラムは集合論の発展に大きく寄与したが，肝心な連続体仮説には効果がなく，彼は次第にプラトニズムに依拠した独自の数学思想に傾倒していくのである．

さて，本巻は，以前の巻と同様，序と三つの部で構成される．まず「序」では，集合論の誕生と発展の様子を展望する．集合論がガウスの伝統を汲むドイツ数学の中に生まれ，とくに連続体仮説を試金石としてその理論の内外を洗練させ，また数理哲学を深化させていった様子を広角レンズでとらえる．その発展は，1930 年代のゲーデルの仕事で素朴な段階を一応終える．それ以降の集合論の展開については，本文でくわしく語られるので端折り，最後にゲーデルの後半生について簡単に述べよう．

第 I 部は，ツェルメロ・フレンケルの集合論への「自己完結的な」入門である．執筆者は集合論の専門家であり，計算機科学を含む多分野の著書・訳書をおもちでもある渕野昌氏である．集合論の公理や基本概念についてはもちろん，土台となる 1 階論理についても予備知識を仮定せずに一からていねいに説明されている．ゲーデルの相対無矛盾性の仕事については厳密な証明が与えられ，のちのコーエンの仕事については見通しのいいアウトラインが与えられている．

第 II 部は，20 世紀後半の集合論の発展の様子を，「ゲーデルのプログラム」を軸に検討する．執筆者は，この分野の国際的研究者松原洋氏である．巨大基数の研究について，こんなに最前線まで解説した一般向けの文章は欧文でもほとんどなく，わが国の集合論の発展に対して貴重な貢献になるだろう．

かわって，第 III 部は，ゲーデルのプラトニズムについての哲学サイドからの検証である．担当の戸田山和久氏は，ご専門の科学哲学を中心に硬軟問わず多数の本を著されているが，とくにワンのゲーデル伝の訳書はこのシリーズを通して重宝させていただいた．一流の哲学者が，ゲーデルの数学思想について正面からポジティブに扱うことはこれまでほとんどなかっただけに，大変興味深い解説になっている．

なお，本シリーズの企画段階では，この最終巻にもう一つ哲学の解説を入れる案があった．一部にそういう宣伝もなされていたので，期待された読者には深くお詫びをしなければならない．しかし，本巻の第 III 部はすでにゲーデ

ルの数理哲学全般を広くカバーしており，またこの巻の予定ページ総数（240ページ）と予定発行日を大幅に超えてしまったので，途中から現状の形で出版せざるをえなくなった．読者諸氏ならびに関係各位にはご理解をいただきたい．

末筆ながら，本シリーズの刊行にご協力いただいた多くの方々に，執筆者を代表してお礼を申し上げる．

2007 年 7 月　編　者

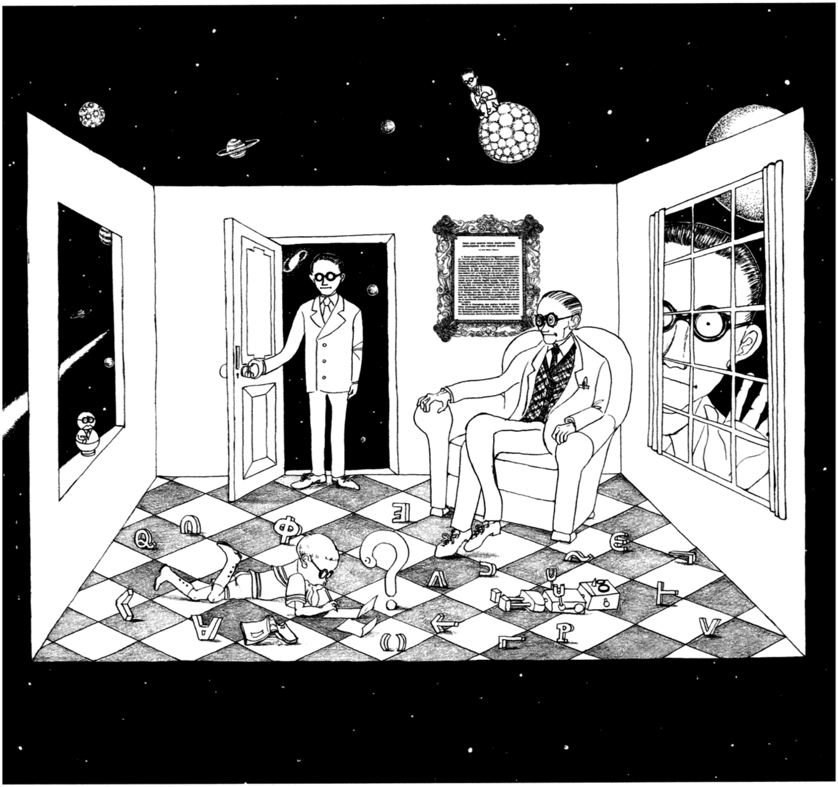
目次

第 III 部　ゲーデルのプラトニズムと数学的直観

序

ゲーデルの集合論とその背景

田中一之



ヨーロッパでは，夏に大きな国際会議が開かれることが多い．ゲーデルは，1930 年 9 月にケーニヒスベルグの精密科学認識論会議で 1 階論理の完全性定理について報告したあと，翌年 9 月には保養地バート・エルスターでのドイツ数学会で不完全性定理について報告した．

このドイツ数学会における，もう 1 人の話題の講演者は，前年久々に本格的な論文を発表して，学界にカムバックしてきた集合論の大家ツェルメロである．20 年以上前に自らが提案した集合論の公理系を改訂し，今日ツェルメロ・フレンケルの集合論 ZF と呼ばれる体系を整備したうえで，それが集合の「累積的階層」をモデルとすることを示した．現代の公理的集合論は，ここに始まるといっても過言ではない．というのは，これ以前の集合論は，統一した世界観をもたず，単に数学を展開するのに必要な公理を寄せ集めたものにすぎなかったからである．

しかし，ツェルメロの形式化の弱点は，土台の論理についての吟味が足りなかったことである．彼は，素朴な（形式化が困難な）2 階論理を前提にしており，スコーレムのパラドクスを導く 1 階論理には真っ向から反対した．したがって，ゲーデルの結果にも懐疑的であり，バート・エルスターでは最初ゲーデルと顔を合わせることを嫌がっていたと，オルガ・タウスキー [ワインガルトナー 1992] が回想している．

それでも，ツェルメロの同僚の数論学者ショルツによって無理矢理に引き合わされた 2 人はすぐ議論を始め，それは学会の後まで手紙で続くことになった．不完全性定理の証明には間違いがあると主張するツェルメロの手紙に対し，ゲーデルは長文のていねいな返事を書いた．とくにその文末は，自分の仕事を統括する見方や今後の研究の可能性を語っており，大変興味深い．

> さらに申すなら，私はつぎのように考えます．私の結果の要点は，どんな形式体系からも（対角線論法によって）外に出られるといったことではなく，メタ数学のどんな形式体系にも，そこで表現できて，その体系の公理からは決定できない命題が存在するということなのです．そのような命題は，かなり簡単な種類のものであり，自然数論に属します．数学全体が一つの形式体系でと



図 0.1　ツェルメロ

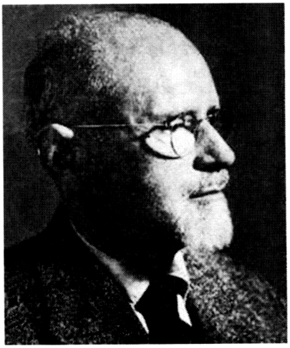


図 0.2　フレンケル

らえられないことは，カントルの対角線論法からいえますが，それでも数学の特定の部分体系は（統語論的に）完全に形式化しうるとも考えられます．私の証明は，その部分体系が自然数の足し算とかけ算の概念を含んでいる限り，完全な形式化が不可能であることを示しているのです（形式化というのは，有限の公理と推論規則によって記述できることと理解してください）．私が論文（原文 p.191，脚注 48a）[1]でも言明しましたように，相対的には決定不能な命題でももっと高階の体系では必ず決定可能になり，しかしそのような高階体系にも同様に決定不能命題が存在して，このことはいくら続けても終わりがないのです．

以上の私の説明でご納得いただけたら幸甚です．もちろん，これも正確な「証明」とは考えないでください．証明は，私の論文の引用箇所に書かれています．*Fundamenta* 誌に載った先生の論文を送っていただいたということで，たいへん恐縮です．残念ながら，まだ私の手元には届いておりません（ひょっとすると，郵送中に紛失したのかもしれません）が，その論文は，発表されたあとすぐに読んでおります．それを読んだとき，私には多くの考え

1）本シリーズ第 3 巻序，p.16 に訳あり．

が浮かびました．もしご関心がございましたら，次回にお知らせしたいと存じます．[ゲーデル全集 V, pp.428–429]

ツェルメロはゲーデルに再び手紙を書いたが，ゲーデルの新しい着想に興味を示すことはなく，ゲーデルはカルナップに相談したうえで，無益に思える論争から身を引いた．この一件が，ゲーデルと集合論の結び付きにどれだけ影響を与えたかは分からない．しかし，数年後に彼が連続体仮説（ヒルベルトの第 1 問題）の（相対無矛盾性）証明に用いた論法のエッセンスは，すでにここに暗示されている．すなわち，連続体仮説を成り立たせるゲーデルの構成的宇宙は，脚注 48a の型理論的見解によって，ツェルメロの累積的階層を精錬したものとみなせるのである．これについては，0.2 節でさらにくわしく述べよう．

連続体仮説とは，ヒルベルトが 23 問題を出題したときの言葉をそのまま使って説明すれば，以下のようである．

> 二つの集合が（カントルの意味で）同等，あるいは同じ濃度をもつというのは，それらの要素の間に 1 対 1 の対応関係が成り立つことをいう．実数の集合の研究によって，カントルが発見した以下の正しそうな命題は，多大な努力にもかかわらず，いまだ誰も証明に成功していない．その命題とは，つぎの通りである：
>
> 実数の無限集合は，自然数全体の集合と同等であるか，実数全体の集合と同等である．つまり，可算であるか，連続体の濃度であるかの 2 種類しかない．[Hilbert 1902]

この問題に対するゲーデルの解答は，（1 階論理上で）ツェルメロ・フレンケルの集合論 ZF が矛盾していなければ，連続体仮説 CH を加えても矛盾しないこと（相対無矛盾性）であり，換言すれば（ZF が矛盾していない限り）連続体仮説 CH の否定は ZF から導けないことである．他方，ZF から CH（の肯定）が導けないことは，1963 年にコーエンによって証明されている．この二つの結果により，連続体仮説は集合論 ZF から決定できない（独立である）という結論が得られたことになる（本書第 I 部 4.2 節を参照）．その後も，

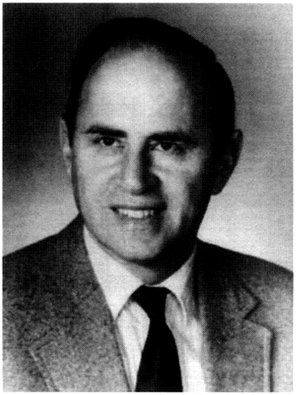


図 0.3　コーエン

集合論の公理系を改良したり，論理を強めたりすることで，CH の真偽を判定しようという試みはたくさんなされてきたが，21 世紀の現在もまだ万人に納得のいく判断は得られていないのである．

ところで，コーエンの証明方法も，やはりツェルメロの累積的階層の改良である．ゲーデルが，与えられた集合宇宙の内に構成的小宇宙をつくったのに対し，コーエンは宇宙の外にもっと大きな宇宙をつくり出す方法をみいだしたのである．その技法は，ゲーデルの発見以上に，集合論に大きな変革をもたらした．私が学生の頃（1980 年頃）には，よく冗談で 1963 年以前を B.C. (before Cohen) といい，ゲーデルは B.C. の神であったなどといったものである．そのコーエン[2)]が，2007 年 3 月 23 日に急逝された．20 世紀のロジックの終焉を象徴するニュースの一つである．

2)　ポール・コーエンは，1934 年 4 月 21 日ユダヤ系アメリカ人の家庭に生まれた．シカゴ大学のジグムント教授のもとで実解析学を学び，三角級数の一意性というカントルの初期の仕事と共通するテーマで，1958 年に博士号を取得．1959–61 年にプリンストン高等研究所に滞在した．1961 年よりスタンフォード大学の助教授となり，そこでとくにロジシャンのフィファーマン教授の協力を得て，連続体仮説の独立性の証明を完成させた．1966 年，この業績によりフィールズ賞を受賞．その後も多方面に仕事を残しているが，もっとも力を注いだのは，リーマン予想（ヒルベルトの第 8 問題）への挑戦であったという．2007 年 3 月 23 日にスタンフォードで逝去．

本序は，三つの節で構成される．最初の 0.1 節ではカントルの仕事を中心にゲーデル以前の集合論の発展を概観する．カントルによって創始された集合論は，ツェルメロの公理化を経て，ゲーデルによってメタ数学の対象となった．この 3 人は精神の限界まで連続体問題に挑み，結局その解決には至らなかったが，彼らはそれ以前の数学が排除した無限を肯定することで大きな叡智を人類にもたらしたといえるだろう．0.2 節ではゲーデルによる連続体仮説の相対無矛盾性証明のエッセンスと，その周辺での彼の考察について述べる．技術面の詳細は，本巻第 I，II 部に譲る．0.3 節ではその後のゲーデルの歩みについて，とくに集合論の研究に関しての足跡を追う．これはゲーデルの哲学思想と切り離せないので，くわしい検討は第 III 部でなされる．

0.1　集合論の背景

2006 年 8 月マドリードで開かれた国際数学者会議において，数学の応用研究に対して新設されたガウス賞を，確率微分方程式で有名な伊藤清京都大学名誉教授が授賞された[3)]．ガウスといえば，磁気誘導の単位ガウスやガウス分布など，数学の応用における業績もたしかに顕著であるが，わが国の数学界ではしばしば数論第一主義の元祖とみなされてきた．その際，ガウスのつぎの言葉はよく引用される．「数学は科学 (Wissenschaften) の女王であり，数論 (Arithmetik) は数学の女王である.」

ギリシャ語の “arithmos” は 2 以上の自然数のこと（1 は “monos”）であり，数論というのは狭義には整数の研究を指す．無理数はホンモノの数でないという考えが，古代ギリシャ以来 19 世紀のヨーロッパにも強く残っていた．集合論の祖カントルに敵対したクロネッカーはそのような思想を固持し，上のガウスの言葉も彼が広めたものである．さらに，クロネッカー自身はつぎのように語った．「愛する神は整数を創造され，他のものはすべて人の造ったものである」(1886 年の「ベルリン自然研究者会議」における講演).

1882 年にリンデマン（ヒルベルトの師）が円周率 π の超越性（代数方程

3)　伊藤清氏と集合論の関係については，本シリーズ第 1 巻第 2 章をみよ．

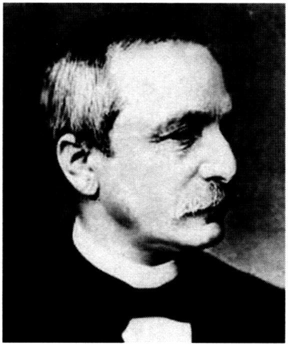


図 0.4 クロネッカー

式の解として定義できないこと）を証明したときも，クロネッカーは「そんな証明に何の値打ちがあるのだ．もともと π などという数は存在しないのだから」といったそうである [ベル 2003, III, p.234]．π の超越性証明は，ギリシャの三大作図問題の一つである円積問題（円と同じ面積の正方形を作図すること）を否定的に解決する，数学史上の大事件であったのだが．

日本が西洋数学を輸入し始めた頃，クロネッカーがドイツ最高学府ベルリン大学の教授として君臨していたために，その影響は日本にも及んだ．菊池大麓の勧めで，1883–86 年にヨーロッパ留学をした藤沢利喜太郎は，ベルリン大学でクロネッカーに師事した．藤沢の専門は数論ではなかったので，博士号はシュトラスブルグ大学から取得するが，帰国後はクロネッカーのアドバイスにしたがって代数学の人材も育てた．その第 1 号である高木貞治は「クロネッカーの青春の夢」と呼ばれた未解決問題を解いて世界的に有名になった．

第 2 次世界大戦後，いわゆるクロネッカー・藤沢の数学思想は，とくに教育界で糾弾されて精彩を失ったが，それでも日本文化に深く浸透しており，簡単に掃き捨てることもできないのが教育の恐ろしいところである．量の考えを重視して，「水道方式」を考案した遠山啓もつぎのように述べている．

> クロネッカーの考えは我国の藤沢利喜太郎によって輸入され，日本の数学教育に深刻な影響を与えた．それがいわゆる「数え主義」であ る．
>
> それは 1, 2, 3, ... という数詞の記憶から出発し，量の考えを排除しつつ進んでいこうとするものである．
>
> 明治以来の国定教科書はこの方針にしたがってつくられ，いまでもこの数え主義は根強く残っている．この数え主義は連続量をとらえることができない．もともと量を排撃する立場に立っているからである．だからそれは連続量の抽象的表現である分数や小数をいかに考えるか，という問題には解答を持ち会〔ママ〕わせていないのである．[遠山 1989, p.137]

藤沢は，国定教科書を編纂する前の明治 28(1895) 年に『算術条目及教授法』という本を著している．その中でも「数学は量のことを論ずる学問にあらざるなり」(p.132) という主張をくり返してはいるが，その論拠は，必ずしもクロネッカーと一致していない．彼はつぎのように述べている．

> 今日は最早，外物の補助を借らずして，純粋の数学的道行きにより不盡数〔引用者注：無理数〕を整数分数より導き来ることを得る様になれり，（中略）今日広く世に行わる，不盡数の解釈に二つあり，一つをデデキントの解釈と称し，一つをカントルの解釈と称す．[藤沢 1895, p.137]

クロネッカーは π のような無理数は存在しないから，そんなものについて議論しても意味がないといったのに対して，藤沢は無理数の理論は（集合概念を用いて）整数の理論に還元できるから重要でないという穏便な主張をしている．藤沢の力点は有限主義にはなく，整数のプラトニズムにあったようだ．いずれにしても，その頃にすでに，日本でもデデキントやカントルの無理数論が公認されていたことは注目される[4]．

---

4) 本シリーズ第 1 巻第 I 部第 1 章を参照．

カントルは集合論を構築する途中で，有限主義者のクロネッカーから批判や嫌がらせを受けたものの，彼らはもともと師弟関係にあり，二人ともガウスの伝統を汲むドイツ本流の数学者である．したがって，集合論の背景として，当時のドイツ数学界のありさまを一瞥しておくことも有益だろう．

18 世紀は微積分学の発展と応用の時代であり，オイラーがフリードリヒ大王の招きで一時期ベルリンに滞在していたとはいえ，数学の拠点はずっとパリにあった．ドイツでもさらにゲッチンゲンのような田舎町になると，数学を専門的に研究する人が集まるような場所ではなかった．そこに天文台長として 40 年間勤めながら，独力で数学の未知な世界を切り拓いていたのがガウスであった．そのガウスが 1855 年に亡くなると，彼を崇拝していたディリクレがベルリン大学教授の職を捨ててゲッチンゲンに赴任し，パリ仕込みの解析的手法を用いてガウスの残した整数論を整理し，発展させた．その彼も 1859 年に亡くなり，そのあとをガウスの弟子リーマンが継いだ．

一方，ディリクレの移動で空いたベルリン大学教授の席についたのが数論研究者のクンマーである．そして，彼の弟子であって，のちには同僚になり，最後は後継ぎとしてベルリン大学教授になったのが，クロネッカーであった．当時のベルリン大学には，もう一人有力な数学者がいた．現代解析学の父とも呼ばれるワイエルシュトラスで，彼とクロネッカーは犬猿の仲で知られていた．

1845 年生まれのカントルは，そんな活気あふれるベルリン大学で，クンマーとクロネッカーの指導のもとで数論を学び，1867 年にガウスの伝統を継ぐ 2 次不定方程式の整数解に関する研究で博士号をとった．彼はワイエルシュトラスの講義も受けていたが，その頃は表立った影響はみられない．その後，カントルは，ベルリンとゲッチンゲンの中間に位置するハレの大学で教職につき，そこで一生を送ることになる．ハレには，ワイエルシュトラスの影響を強く受けたハイネがいた．ハイネは，今日ハイネ・ボレルの被覆定理で知られるように，位相空間論の先駆者の 1 人である．

カントルは，1870–72 年に三角級数（フーリエ級数）の一意性についての論文を発表した．三角級数と呼ばれるのはつぎのような無限級数である．

$$f(x) = \frac{1}{2}b_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \sin nx + b_n \cos nx)$$

カントルが証明した重要な定理は，異なる三角級数は異なる関数を表現するというものである．つまり，すべての実数 x における値 $f(x)$ を定めれば，三角級数（の係数 a_n, b_n）はただ一つに定まるというものである．この一意性の問題は，ディリクレ，リーマン，そしてハイネも挑戦した難問であり，この顕著な成果によりカントルは数学界で一躍脚光を浴びた．

さらに，カントルが考え進めたことは，すべての実数 x における値 $f(x)$ を定めなくても，三角級数は一意に決定できるのではないかということである．有限個のデータを消去してもそれ以外のデータから全体を復元できることは比較的容易に分かる．では，どれだけデータを消去できるかというのが問題となる．なお，カントルは，1872 年の論文ではじめて有理数の無限列による「実数」の定義を導入した．

他方，同じ年にデデキントも，有理数の無限集合である「切断」を用いた実数の定義を発表している．彼は，前年に代数的数の集合として「イデアル」の概念を導入しており，これらの構成の類似性はしばしば指摘されるところである．

再びカントルの仕事に戻るが，ここで少し数学用語の準備が必要である．A を三角級数の定義域となる区間 $[0, 2\pi]$ の部分集合としておこう（三角級数は周期関数である）．実数 x が A の集積点であるとは，x が A の（x 以外の）点列の極限として表されることをいう．いま，A の集積点の全体を A' と記し，A の導集合 (derived set) と呼ぶことにする．すると，A が有限であることと $A' = \emptyset$ とは同値条件である．つぎに，A' の導集合 $A^{(2)} = A''$ を考える．$A' \neq \emptyset$ で $A^{(2)} = \emptyset$ となるとき，A は有限個の集積点をもつ可算無限集合であり，全体として密度が薄い感じの集合である．そして，このような集合の点のデータは消えても三角級数が復元できることをカントルは示している．同様に，$A^{(2)}$ の導集合として $A^{(3)}$，$A^{(3)}$ の導集合として $A^{(4)}$ などつくっていって，どこかで空集合が現れれば，A はデータを消してよい点の集合になる．ここには，実数の集合という形で，集合論の萌芽がみられる．

続いて，集合論の原点とされる 1874 年の論文で，カントルは連続体 $\mathbb{R}$ が非可算であることを証明した．この証明法は，いわゆる対角線論法ではなく，ハイネ・ボレルの被覆定理の証明と似ている．簡単に説明しておこう．連続体 $\mathbb{R}$ が可算であるとしよう．このとき，$\mathbb{R}$ の点を一つ一つ順によけながら，縮小閉区間の加算無限列をつくっていくことができる．すると，区間列全体の共通部分に入る点はなくなるはずだが，他方実数の連続性（ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの性質）からこれは空にはならないので矛盾である．また，この論文では，（有理係数多項式の根として定まるような）代数的数は可算個しかないことが示され，実数の大半が方程式などで表現できないという事実も導かれた．

1878 年の論文では，$\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}$ の濃度が等しいことが証明される．この論文に先立って，カントルはデデキントと何度も手紙をやりとりして，その書中にこの事実の発見の心境を，「我見るも，我信ぜず (Je le vois, mais je ne le crois pas)」とフランス語で表現している．そして，この論文の最後に，連続体仮説，つまり実数の集合は，可算であるか，連続体の濃度をもつという主張が述べられている．

1879 年から 1884 年にかけては，「線上無限点集合論」という題で 6 編のシリーズ論文を書いている．これは，1870–72 年に三角級数の一意性の問題を扱った研究を「超限」に拡張するものである．いま，A の導集合を A'，A' の導集合 $A^{(2)} = A''$，$A^{(2)}$ の導集合として $A^{(3)}$ などをつくっていくと，$A^{(1)} \supset A^{(2)} \supset A^{(3)} \supset \cdots$ という関係が成立する．これらがすべて空でないとしたらどうだろうか？　このとき，$A^{(\infty)} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)}$ とおくと，これも空でないことがわかる（コンパクト性の概念を使う）．そこで，さらに $A^{(\infty)}$ の導集合として $A^{(\infty+1)}$，$A^{(\infty+1)}$ の導集合として $A^{(\infty+2)}$ などのような減少列を考えることができる．そして，$A^{(\infty+\infty)} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A^{(\infty+n)}$ も自然に定義される．こうしてどこかで空集合が現れれば，A はデータを消してよい点の集合になる．このような考察を経て，カントルは順序数の概念に到達したのである．6 編の論文を通じて，集合論建設のためのいろいろな試みがなされている．とくに第 5 編は，「一般集合論の基礎」(1883) という題名で単独にも発表されたが，ここで順序数と整列性の概念が明確に与えられた．

1884年，カントルは連続体仮説を証明できたと思って論文にし，それを学術誌に投稿したあと，自ら過ちに気づいて取り下げた．彼が精神病の最初の発作を起こしたのは，その直後である．連続体仮説への過度の集中が彼の精神を蝕んだにちがいなかった．カントルはこの呪いから逃れるためか，シェークスピアの研究を始めた．そして，シェークスピアがベーコンと同一人物であるという奇説を証明しようと突き進んだ[アクゼル 2002]．その後，精神状態がよくなったときには数学に戻り，1890年にはドイツ数学会の初代会長に就任している．

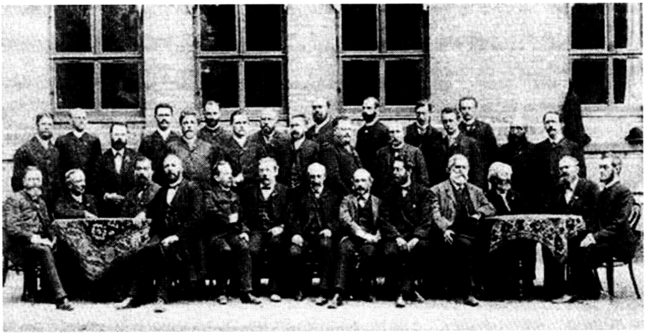


図 0.5 ドイツ数学会設立当時のメンバー（1890年．ブレーメンにて）©ドイツ数学会
前列：(左から) カントル（4番目），ゴルダン（7番目），スツルム（8番目），クライン（9番目），シュレーダ（12番目）．後列：(右から) ヒルベルト，ミンコフスキー（4番目）．

1891年の論文「集合論の一つの初等的問題」において，対角線論法が初めて登場する．これは，実数の非可算性の別証明であるよりは，どんな集合に対しても，そのベキ集合をとることで，より高い濃度の集合が存在することを示したことに意義がある．

カントルの最後の数学論文である「超限集合論の基礎づけ」(1895–97) では，超限順序数論としての集合論が系統的に展開されている．超限基数は，$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots$ と名付けられ，連続体仮説 CH は，$2^{\aleph_0} = \aleph_1$ と表現されるようになった．ただし，カントルは，これをまだ証明の見つからない真理であると信じていたため，「仮説」とは呼んでいない．

1900年にパリで開かれた第2回国際数学者会議で，ヒルベルトが23問題の第1問題として発表したのが連続体仮説であり，以来この問題は広く知られるようになった．この出題の際に，ヒルベルトは，第1問題を解決する鍵になるのが，連続体の整列可能性であるとも述べている．

1904年，ハイデルベルグでの第3回国際数学者会議では，ケーニヒが連続体は整列可能でなく，連続体仮説も成り立たないという趣旨の講演をした．病み上がりで列席したカントルは，この講演を聴いて激昂したという．会議のあと直ちに，ツェルメロがその議論の間違いを発見し，のちに選択公理ACと呼ばれるようになる原理を仮定すれば，すべての集合の整列性が導けることを示した．選択公理の主張はつぎのようである．互いに共通部分をもたない空でない集合からなる空でない集合に対しては，その要素の各集合とちょうど一つだけ要素を共有するような集合が存在する．

しかし，選択公理は，集合論に新たな論議の種を生んだ．1904年から1905年にかけて，フランスの数学者ボレル，ベール，ルベーグ，アダマールが選択公理をめぐってとり交わした手紙の和訳が[田中（尚）2005]に収められている．また，1906年には，イタリアのヴィタリが，選択公理によって（ルベーグの意味での）非可測集合が構成できることを示した．

選択公理も，整列定理も，当初の反応はほとんどが否定的であった．ツェルメロは，1908年に選択公理から整列定理を導く別の証明を考案した．それと関連して，選択公理以外の集合論の公理を整理した．その公理は，外延性，初等集合（空集合，単元集合，対集合），分出公理，ベキ集合，和集合，選択公理，無限公理の七つであった．

同じ頃，ハウスドルフが，ツェルメロとは違う視点から集合論の研究に着手していた．彼は，ライプチヒ大学で天文学と光学を学び，1891年に博士号を得ている．裕福な家庭の出で職の心配もなかった彼は，文学と哲学に心酔し，数学を始める前には「ポール・モングレ」というペンネームで文筆活動を行い，ニーチェに傾倒した文学大作も残している．

カントルの集合論の射程があくまで実数論にあったのに対し，ハウスドルフは一般の順序集合や位相空間についても考察した．1908年には，一般連続体仮説GCHを $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ として定義した．1913年にグライフスヴァルト

大学の教授となり，1914 年に集合論の代表的教科書として長く読み継がれる『集合論大要 (*Grundzuge der Mengenlehre*)』を発行した．

1914 年，ハウスドルフは，のちのバナッハ・タルスキのパラドクス (1924) のプロトタイプになるパラドクスを発見した．それは，選択公理のもとで成り立つ，つぎのような主張である．球面を三つの部分 A, B, C に分割して，A, B, C および $B \cup C$ が互いに合同となることができる．バナッハとタルスキは，類似した議論を 3 次元の立体について行い，1 個のりんごを有限個に分割し，それを別な仕方で組み合わせると，地球一つをつくることも可能であることを示した（[砂田 1997] を参照）．これらのパラドクスは，直ちに数学的な矛盾を引き起こすものではないが，選択公理に対しての疑念をさらに強める方向に働いた．

一方，1916 年には，ボレル集合については連続体仮説が成り立つこと（すべてのボレル集合は可算もしくは連続体濃度であること）をハウスドルフとアレクサンドルフが独立に証明した．ボレル集合というのは，開集合と閉集合から，集合の可算演算によって構成されるものである．同じ年（ロシア革命の前年），モスクワ大学のルージンの学生スースリンは，ボレル集合の連続像（射影）が，ボレル集合族より真に大きな集合族を形成することを発見し，翌年にはその族（その要素は解析集合と呼ばれる）についても連続体仮説が



図 0.6 ハウスドルフ

成り立つことを示した．スースリンは若くしてチフスに倒れ (1919)，その研究はルージンとシルピンスキーが引き継ぎ，記述集合論として発展する[5)]．

1921 年にハウスドルフはボン大学に移り，ナチ政権に職を奪われる 1935 年まで勤めた．その後も彼は研究を続けたが，結果を発表することが許されなかった．ユダヤ人である彼の立場はますます苦しくなり，アメリカへの亡命も果たせず，絶滅収容所への中継輸送の通知を受け取った直後の 1942 年 1 月 26 日に妻と義姉とともに睡眠薬を飲んで自殺した．

1920 年代になると，すでに集合論は数学の広い範囲で用いられ，選択公理もいろいろな応用を伴って議論されるようになった．そのような集合論の広がりを紹介するには紙数が足りないので，たとえば [田中（尚）2005] を参照してほしい．以下では，公理的集合論の発展に話題をしぼって話を進めよう．

1920 年代初め，フレンケルとスコーレムが，ツェルメロの公理系に置換公理を追加することを独立に主張している．この公理がないと，たとえば，自然数全体 ω から，ベキ集合演算 $\mathcal{P}$ を任意有限回くり返して得られる集合全体のクラス

$$\{\omega, \mathcal{P}(\omega), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega)), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))), \ldots\}$$

は，集合として存在することが証明できない[6)]．さらに，スコーレムは，分出公理や置換公理は図式で表され，その条件文は集合論の形式言語における任意の論理式となることに注意を促した．

他方，フォン・ノイマンは，集合の集まりであるクラスを用いることで，分出公理や置換公理をそれぞれ単一の論理式で表した．これに基づく体系は，今日 BG（ベルナイス・ゲーデルの意），もしくは NBG（ノイマン・ベルナイス・ゲーデル）などと呼ばれることが多い．また，彼は，順序数や基数に対し形式的定義を与え，超限帰納法なども定式化している[7)]．

ここで，ツェルメロの再登場である．1930 年の論文で，彼は ZFC（=ZF+選択公理 AC）の公理系を規定し，それに対する一つの標準的なモデル V を構成した．それは累積的階層と呼ばれ，つぎのように超限再帰的に構成される．

---

5) 本シリーズ第 1 巻第 I 部 pp.62–63，および本書第 II 部第 2 章参照．
6) 本書第 I 部定理 3.13 の後を参照．
7) BG については本書第 I 部 1.3 節を参照．

$$V_0 = \emptyset, \quad V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha), \quad V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha \quad (\lambda \text{ は極限順序数});$$

$$V = \bigcup_\alpha V_\alpha.$$

この構造 V が，ZFC の公理をすべて満たすことは比較的容易に確かめられる．この事実によって，ZFC の整合性に対するある種の信頼感が得られた [ジャキント 2007, 第 VI 部] が，もちろんこれは厳密な意味での無矛盾性の保証ではまったくない．

このV の中で，たとえば選択公理が成り立つというのは，V をつくった外の世界でも選択公理が成り立っているということにすぎない．ゲーデルは，この V の構成法を改良して，外側で選択公理や連続体仮説が成り立っていようがいまいが，内部では必ずそれらが成り立つようなモデルをつくった．これによって，それらの公理の相対無矛盾性を証明したのである．その内容は，次節で述べよう．

0.2 ゲーデルの証明

1933 年 10 月から 1934 年 5 月まで，ゲーデルはプリンストンに創設されたばかりの高等研究所に招聘された．そのときの講義（1934 年の 2 月から 5 月）は，不完全性定理の証明を再構築し，再帰理論の出発点になったことは本シリーズの以前の巻でも述べた（第 3 巻 p.22 など）．

それに先立つ 1933 年 12 月，彼はマサチューセッツ州ケンブリッジでのアメリカ数学会で「数学基礎論の現状」という題目の講演を行っている．その講演メモが『ゲーデル全集 III』に収録されているが，そこにはゲーデルが 1930 年のツェルメロの論文を読んで得たと思われる累積的階層についての考察がいろいろ述べられている．

その講演メモによると，数学の基礎付けは，なるべく簡明な公理系の設定と，その公理系の正当化 (justification) の二つの部分とからなるとし，前者は累積的階層をモデルとした ZF 集合論で達成されているという．しかし，ZF

集合論は，非構成的，あるいは非可述的性質をもち，また選択公理との関わりから，正当化は困難であるとして，つぎのように述べている．

> これらの公理を意味ある命題に解釈させる場合，ある種のプラトニズムを前提にしなければならない．しかし，それではどんな批判的精神も満たせないし，公理たちが無矛盾である確信さえも生み出しはしない．[ゲーデル全集 III, p.50]

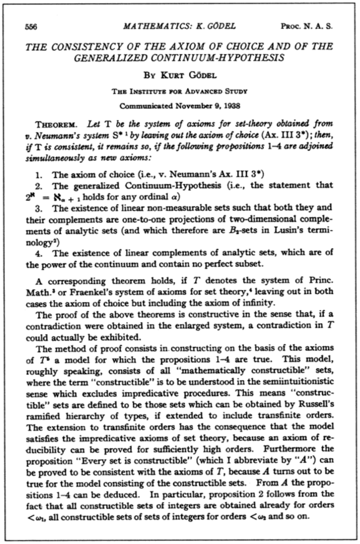
この時点で，ゲーデルはプラトニズムへの依存の不可避性をすでに意識していたが，それに否定的であったことが分かる．では，他にどういう方法がありうるか？　ここで彼は，ヒルベルトの有限の立場や，直観主義について精細な検討を与えている．その議論の筋は 1938 年の講演（『ゲーデル全集 III』のツィルゼル講演メモ（とくに，pp.86–87））で，より明確にされる．そこで強調されるのが相対無矛盾性，つまり，大きな理論の無矛盾性を小さな理論のそれに還元することであった[8)]．これが，不完全性定理を超えてヒルベルトの第 2 問題（実数論の無矛盾性）に取り組む方法であると同時に，第 1 問題（連続体仮説）への扉をも開く鍵であった．

ゲーデルはプリンストンから帰国すると，神経衰弱を患い，サナトリウムでの治療をはじめた．そして，その秋から予定されていた 2 度目の高等研究所訪問をキャンセルした．翌 35 年の秋にはプリンストンを再訪したが，やはり健康の理由から 1 カ月で帰国している．病の原因は必ずしも一つに定まるものではないかもしれないが，彼がその頃連続体の問題に全神経を集中させていたのは確かである．カントルの魂を吸い取った悪魔の問題にゲーデルも飲み込まれそうになっていた．しかし，ゲーデルにとって幸いだったことは，自らの画期的な仕事を含め，ロジック全体が著しい発展を遂げていたことである．ラッセルの分岐型理論，ヒルベルトの証明論（第 3 巻序，p.10），そしてツェルメロの累積的階層など，多くの先行結果がゲーデルの武器となった．1937 年には，一般連続体仮説 GCH の相対矛盾性の証明のアイデアを得て，同年 7 月にウィーンを来訪したフォン・ノイマンに初めてその概要を明かした．それから 1 年かけて証明の細部を完成させ，1938 年の 3 度目の高等

8)　本シリーズ第 3 巻序，p.13.

研究所訪問で，晴れてその成果について講義した．これが講義録として 1940 年に出版され，「赤い本」として広く読まれた[9]．

またゲーデルは，1938 年と 39 年に，自らの結果をそれぞれ 2 ページと 5 ページにまとめて，アメリカ科学アカデミーの会誌にも報告している．それらは，「赤い本」の単なる要約ではない．前者はもっとも一般的な主張として結論だけを述べたもので，後者はその中の主要結果の証明のエッセンスを伝えたものである．



556 *MATHEMATICS: K. GÖDEL* PROC. N. A. S.

THE CONSISTENCY OF THE AXIOM OF CHOICE AND OF THE GENERALIZED CONTINUUM-HYPOTHESIS

BY KURT GÖDEL

THE INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY

Communicated November 9, 1938

THEOREM. *Let* T *be the system of axioms for set-theory obtained from v. Neumann's system* S*[1] *by leaving out the axiom of choice* (Ax. III 3*); *then, if* T *is consistent, it remains so, if the following propositions* 1–4 *are adjoined simultaneously as new axioms:*

1. The axiom of choice (i.e., v. Neumann's Ax. III 3*)
2. The generalized Continuum-Hypothesis (i.e., the statement that $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ holds for any ordinal α)
3. The existence of linear non-measurable sets such that both they and their complements are one-to-one projections of two-dimensional complements of analytic sets (and which therefore are B_2-sets in Lusin's terminology[2])
4. The existence of linear complements of analytic sets, which are of the power of the continuum and contain no perfect subset.

A corresponding theorem holds, if T denotes the system of Princ. Math.[3] or Fraenkel's system of axioms for set theory,[4] leaving out in both cases the axiom of choice but including the axiom of infinity.

The proof of the above theorems is constructive in the sense that, if a contradiction were obtained in the enlarged system, a contradiction in T could actually be exhibited.

The method of proof consists in constructing on the basis of the axioms of T[5] a model for which the propositions 1–4 are true. This model, roughly speaking, consists of all "mathematically constructible" sets, where the term "constructible" is to be understood in the semiintuitionistic sense which excludes impredicative procedures. This means "constructible" sets are defined to be those sets which can be obtained by Russell's ramified hierarchy of types, if extended to include transfinite orders. The extension to transfinite orders has the consequence that the model satisfies the impredicative axioms of set theory, because an axiom of reducibility can be proved for sufficiently high orders. Furthermore the proposition "Every set is constructible" (which I abbreviate by "A") can be proved to be consistent with the axioms of T, because A turns out to be true for the model consisting of the constructible sets. From A the propositions 1–4 can be deduced. In particular, proposition 2 follows from the fact that all constructible sets of integers are obtained already for orders $<\omega_1$, all constructible sets of sets of integers for orders $<\omega_2$ and so on.

図 **0.7** 1938 年の集合論に関する論文. *Proceedings of the National Academy of Science U.S.A.*, **24** (1938), 556.

1938 年の論文に述べられた結果は，つぎのようである．

T を，ツェルメロの集合論 Z，ツェルメロ・フレンケルの集合論 ZF，もしくはベルナイス・ゲーデルの体系 BG，あるいはプリンキピアの体系 PM（選

9) 本シリーズ第 1 巻第 I 部第 2 章を参照．

択公理を除き，無限公理は入れる）とする．このとき，T が無矛盾であれば，つぎの主張をすべて新しい公理に加えても矛盾である．

1. 選択公理．
2. 一般連続体仮説[10)]．
3. ルベーグ可測でない Δ^1_2 集合の存在．
4. 完全部分集合を含まない，連続体濃度の Π^1_1 集合の存在．

証明のポイントは 1–4 を成り立たせるモデルをつくることであり，それは「構成可能 (constructible)」集合[11)]の全体として得られる．構成可能性については，ゲーデルは以下のように説明している．

> ここで，「構成可能」という語は，非可述的方法を遮断する半直観主義的意味において理解されるべきものである．つまり，構成可能集合とは，ラッセルの分岐型理論を超限順序を含むように拡張して得られるような集合のことである．

1939 年の論文では，とくに T をツェルメロの集合論 Z として，その内部の構成可能集合全体が T のモデルになり，上記 1，2 を成り立たせることを概説している．3，4 については，1939 年の論文にも，40 年の「赤い本」の初版にも何も書かれていない．51 年の「赤い本」第 2 版で証明のアイデアが脚注に加わる[12)]．

しかし，これではまだ相対矛盾性の証明は完結していない．「すべての集合が構成可能である」という主張を A とするとき，構成可能集合全体が T のみならず，A のモデルにもなることがその証明には必要である．これは一見明らかにも思えるが，一番厄介なところでもある．これを認めれば，もし T プラス A から矛盾が生じたときには，その議論を構成可能集合の中で見直すことにより，T だけから矛盾が導ける．対偶を考えれば，T が無矛盾なら，T プラス A も無矛盾である．この部分の議論は，「赤い本」で厳密に展開されている．

---

10)　一般連続体仮説から選択公理が導けることは，シルピンスキー (1947) によって証明された．
11)　構成可能集合は，構成的集合とも呼ばれる．
12)　関連の話として，本シリーズ第 1 巻第 II 部 2.4, 2.5, 3.2 節を参照．

1938 年の論文の最後には，以下のような記述がある．

> 新しい公理として追加された命題 A は，任意の無限集合という曖昧な概念を一定の方法で確定させることにおいて，集合論の公理系の自然な完備化を与えているようにみえる．これに関係して，A の無矛盾性証明は，より強い無限公理（たとえば，到達不可能数の存在）を T に加えても，破綻しないということは重要である．だから，A の無矛盾性は，ある意味で絶対的であるようにみえる．この表現に正確な意味を与えるのは，現状では難しいが．

A の無矛盾性が，より強い無限公理によって破綻しないというのは，現在の認識とは異なる．実際，スコットは，可測基数の存在が命題 A を否定することを示した (1961)．その後，スコットの結果は大幅に改良されて，命題 A の強い否定は，可測基数の存在よりずっと弱い，$0^{\#}$ と呼ばれる実数の存在で特徴付けられることが明らかになっている（$0^{\#}$ については本書第 II 部第 3 章を参照されたい）．

「赤い本」ではメタ数学に関する厳密な議論を展開するために，ツェルメロ・フレンケルの集合論 ZF のかわりに，今日ベルナイス・ゲーデルの体系 BG と呼ばれるものを導入して議論している．体系 BG は，集合と，集合の集まりとしてのクラスを同時に扱うもので，一見複雑なようであるが，有限個の公理で形式化できるという ZF にない利点をもつ．しかも，集合に関する主張（論理式）だけをみれば，両者が証明する定理はまったく一致している．したがって，選択公理や連続体仮説が体系 BG から独立であれば，体系 ZF からも独立である[13)]．

一方，1939 年の論文では，ふつうの集合論を扱っているので，証明は「赤い本」より読みやすい．記号法を，少し現代ふうに改めて眺めてみよう．

ゲーデルは，超限再帰法により，順序数に沿った構成可能集合の階層 L_α を以下のように定義する．

13) 集合論における ZF と BG の関係は，自然数論における PA と ACA_0 の関係に類比できる．本シリーズ第 3 巻の第 II 部を参照．

$$L_0 = \emptyset, \quad L_{\alpha+1} = \mathrm{Def}(L_\alpha), \quad L_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha \quad (\lambda \text{ は極限順序数}).$$

ここで，$\mathrm{Def}(X)$ は，X 上で定義される (definable) 部分集合の全体を表している．もう少し形式的に述べれば，

$Y \in \mathrm{Def}(X) \Leftrightarrow$ ある論理式 $\varphi(x, x_1, \cdots, x_n)$ と $t_1, \ldots, t_n \in X$ が存在して，

$$Y = \{x \in X : X \models \varphi(x, t_1, \cdots, t_n)\}$$

である．さらに，

$$L = \bigcup_{\alpha} L_\alpha$$

とおき，"$V = L$" を前述の主張 A，つまり

$$V = L \Leftrightarrow \forall x(x \in L)$$

とする．

この論文では，構成可能集合の構造 L が，ZF のすべての公理に加えて，選択公理 AC と一般連続体仮説 GCH まで満たすことが示される．つまり，

$$\mathrm{ZF} + V = L \vdash \mathrm{GCH} + \mathrm{AC}.$$

さらに相対矛盾性を導くには，L が $V = L$ を満たすことの証明が必要であるが，それについては 1940 年の「赤い本」で扱われる．これらを厳密に扱うのは，本巻第 I 部に譲ろう．

さて，1938 年の 10 月から 12 月まで高等研究所で過ごしたゲーデルは，翌年 1 月から 5 月まで，メンガーの招きでノートルダム大学に滞在し，そこでも一般連続体仮説について同様な講義を行った．その頃のゲーデルについて，メンガーは，「ゲーデルはますますプラトン主義になっていった．（中略）一方でゲーデルは以前にも増してライプニッツに熱中していた」[ワン 1995, p.75] と書いている．

1939 年 6 月，ゲーデルはウィーンに戻った．しかし，9 月には第 2 次世界大戦が始まり，ユダヤ人に間違えられるなど危険が迫り，また徴兵を恐れて

アメリカ移住を決意した．前回の訪米は，結婚したばかりの妻アデールを残しての単身であったが，今回は妻を連れ，戦争の中を大移動しなければならなかった．1940 年 1 月，海上封鎖のため，ゲーデル夫妻はシベリア鉄道を使い，横浜，サンフランシスコを経由して，プリンストンに向かった．

0.3　その後

プリンストン高等研究所でのゲーデルは，年契約の非常勤職員にすぎなかったが，それでも落ち着いた研究環境で，好きな研究に没頭できるという幸せを手に入れた．1941 年には，のちに「ダイアレクティカ解釈」と呼ばれる算術の無矛盾性証明について講義しているが，彼が最終目標にしていたのは，連続体仮説の独立性であった．[ワン 1995, p.172] によれば，ゲーデルは 1942 年の夏に，有限型理論からの選択公理の独立性を証明し，それを連続体仮説の独立性に発展させようとするが，うまくいかなかった．その困難さを追究するうちに，次第にロジックから哲学に興味を移していったようである．

彼が本格的に哲学に取り組むようになったきっかけの一つに，『バートランド・ラッセルの哲学』という本に執筆分担を依頼されたことがあげられる．ゲーデルは現代論理学史における『プリンキピア』の位置付けと，その内容の問題点などを約半年かけてまとめ，1944 年に「ラッセルの数理論理学」[飯田 1995] として発表した．そこには，ゲーデルの哲学への転向，とくにライプニッツへの傾倒がはっきり現れている．ゲーデルは，最後のほうでつぎのように語っている．

> ペアノその他の人々は（ライプニッツの主張に従って）十進法が数値計算を容易にしたのと同じくらい数理論理学は理論数学を容易にするだろうと期待していた．しかし，数理論理学はこれまでのところ彼らの大きな望みのはるか後方に留まっている．そこで，こうした現状の責めを負うべきは基礎に対する理解が不完全であることではなかろうかという疑いがうまれるのも無理はない．

というのは，われわれのこれまでの分析が公理を設定することにとってすら十分ではないのだとしたら，現われる概念の分析だけで数学の問題を体系的に解決できるなどと一体どのようにすれば期待できるだろうか？[飯田 1995, p.84]

ここでゲーデルは，ロジックの現状，とくに一般の数学への目立った影響が表れていない状況に失望しつつも，基礎的理解をさらに深めることで，つぎの飛躍が期待できるとしている．また，ここには書かれていないが，連続体問題がいまだに解決しないのも，連続体についての根本的，あるいは哲学的な考察が足りないからだとゲーデルは考えたようである．

1946 年，ゲーデルは 40 歳にして，高等研究所の常任研究員になった．この年の初め，彼は，『アメリカ数学月報』いわゆる『マンスリー』に，連続体仮説についての一般向け解説を書くように依頼された．普通の研究者なら，片手間に数週間で仕上げるような 10 ページ程度の解説文のために，彼は 1 年以上全精力を費やした．

1947 年 11 月号に登場した「カントルの連続体仮説とは何か？」[飯田 1995] は，連続体についての歴史，数学，哲学が，選び抜かれた言葉で語られる．それにしても，基数の概念さえ仮定しない読者層に，連続体問題を解決する新しい方法論まで伝授しようとしたのは，無謀な試みといわざるを得ない．

この論説は，四つの節と，専門用語を解説した付録からなる．ここで，四つの節は，(1) 基数の概念，(2) 既知の結果のサーベイ，(3) 集合論の基礎的概念の分析，(4) 連続体問題を解くための提案，である．これらの内容については，本文で扱われるので，ここではくわしくは述べない．

この論説を書き終えてから，ゲーデルは時空間の哲学的な考察を背景に，相対論の研究を開始する．同僚のアインシュタインとは親子ほど歳の差があったが，2 人はたいへん仲がよく一緒に研究所周辺を歩く姿が頻繁に目撃されている．1948 年に，ゲーデルがアメリカ国籍を申請するために，保証人として役所まで同行したのも，友人の経済学者モルゲンシュテルンとアインシュタインであった．

1949 年，ゲーデルはアインシュタインの重力場方程式に対する新しい解を

得て，アインシュタイン 70 歳の記念論文集に，その論文を献呈した．そして，1951 年に新設されたアインシュタイン賞の第 1 回受賞者となっている．

1953 年，ゲーデルは高等研究所でようやく教授に昇進した．50 年代後半からは，高等研究所に新しい世代のロジシャンが数カ月から数年間滞在して，ゲーデルと交流をもった．たとえば，1959 年から 61 年には竹内外史が高等研究所に滞在している．[竹内 1998] によると，この頃の滞在者は，ベルナイス，シュッテ，フィファーマンら証明論関係の研究者が多かったようである．

ちょうどその頃，シカゴ大学で学位をとったばかりの若手解析学者コーエンも高等研究所に滞在していた．彼は，ロジシャンのサークルには入っていなかったが，フィファーマンと交流をもった．その後フィファーマンのいるスタンフォード大学で職を得て，彼の協力のもとで連続体仮説に取り組んだ．1963 年，コーエンは「強制法」と呼ばれる新しい手法を発見して，連続体仮説の独立性証明を完成した．

1966 年，ゲーデルは 60 歳を迎えた（第 3 巻序，p.4）．世界的に名声が高まる一方で，彼は内面的に一層孤立していった．研究所の同僚だったアインシュタインやフォン・ノイマンはすでに亡く，この年 7 月には愛する母マリアンネがこの世を去った（ゲーデルから母への手紙の和訳が [竹内 1998] に収められている）．また，この頃から妻のアデールが，高血圧，関節炎などの複合的な病気にかかって歩行困難になり，追いつめられたゲーデルは 30 年前と似た精神状態の危機を迎えることになる．

このとき，彼は再び悪魔の問題に取り憑かれていた．1970 年，ゲーデルは連続体の濃度が $\aleph_2$ であることを主張する短い論文草案を書き，旧知のタルスキに送った．構成可能集合の最初の論文のように，まずはアメリカ科学アカデミーの会誌に簡単な報告を出して，つぎにくわしい証明を与えるようだったようである．ゲーデルより年上のタルスキはすでに名誉教授になっていたが，相変わらず元気旺盛で，拡大するバークレー学派を率いて，ロジック界に君臨していた．ゲーデルからの乱雑な手書き原稿を受け取ったタルスキは，そのコピーを側近に回して意見を求めたために，証明にミスがあるという事実よりも，ゲーデルの精神崩壊の噂が広まってしまった．確かにこの論文草稿を書いた時点でゲーデルの精神状態は最悪であった．しかし，そのあとす

ぐに回復し，自分でも証明の手直しを始め，少なくとも 1975 年頃まで断続的に研究を続けていたことが，モルゲンシュテルンの日記によって伝えられている（[ドーソン 2006, 第 12 章]）．残念ながら，これに関するゲーデルの研究の全容は明らかになっていないが，1970 年の論文草案 2，3 の断片が全集第 III 巻に収められている．また，[竹内 1998] にも解説がある．

晩年のゲーデルは人付き合いを極端に狭めてしまったので，外でロジックがどのように発展しているかの情報をほとんど入手できなかったようである．「60 年代末以降，ゲーデルはもう若い論理学者の研究を理解できないと告白した」とモルゲンシュテルンが伝えている（[ワン 1995, p.208]）．1970 年に，ロシアの青年マティヤセビッチによって，ヒルベルトの第 10 問題が否定的に解決されたことは，ゲーデルのこれまでの発言（例：本巻第 III 部 p.252，ギブス講義 (21)）を考えると，彼にとってコーエンの証明に匹敵する重要性をもっていたはずであるが，これについて何もコメントが残されておらず，彼がそれを知っていたかどうかも定かでない．（[ドーソン 2006, p.318], および本シリーズ第 1 巻 p.92）．

1970 年代にゲーデルと個人的な交流をもっていた数少ないロジシャンの一人がロックフェラー大学のハオ・ワン教授である．彼は，ゲーデルの哲学的立場に興味をもち，1971 年 10 月から 1972 年 12 月まで隔週にゲーデルを訪ねて，ゲーデルの発言を『数学から哲学へ』(1974) という本にまとめた．この本が出版されても，あまり注目されなかったことにゲーデル自身がっかりしたという記述が，後続の注目本『ゲーデル再考』[ワン 1995] に書かれている (p.214)．

もう一人，ゲーデルが心を開いたロジシャンは，超準解析の発明者アブラハム・ロビンソンであった．ロビンソンは，プラトニズムには批判的であったが，ライプニッツとヒルベルトに強く影響を受けている点では，ゲーデルと共通する点も多く，二人は尊敬し合っていた．心身の衰えを自覚したゲーデルは，高等研究所の自分の後継者に彼を望んでいたと言われている．1973 年 3 月にロビンソンが高等研究所で講演したときには，ゲーデルは超準解析こそが「未来の解析学」となるべきものであると公然と持ち上げた．しかし，不幸なことに，ロビンソンはその数カ月後に癌で亡くなった．

1976 年，後継者のいないまま，ゲーデルは 70 歳で高等研究所を退職する．

この頃，彼はすでに日常生活に支障があるほど衰弱し，また妻アデールも入退院を繰り返すようになっていた．翌年，親友のモルゲンシュテルンが亡くなり，さらに長年の友人ベルナイスも亡くなった．そして，その年の暮れからプリンストン病院に入院したゲーデルは食事を拒否して，翌 1978 年 1 月 14 日に栄養失調で亡くなった．

参考文献

[アクゼル 2002] アクゼル，A. D., 青木薫訳『「無限」に魅入られた天才数学者たち』早川書房 (2002). 原著：Aczel, A. D., *The Mystery of the Aleph: mathematics, the Kabbalah, and the search for infinity.* カントルが，シェークスピア＝ベーコン説に囚われていく様子が描かれている．

[ベル 2003] ベル，E. T., 田中勇・銀林浩訳『数学をつくった人びと　上・下』東京図書 (1997). ハヤカワ文庫版：全 3 巻 (2003). 原著：Bell, E. T., *Men of Mathematics: the lives and achievements of the great mathematicians from Zeno to Poincare* (1937). 原著は 1937 年に出版されたロングセラー．

[ドーソン 2006] ドーソン，ジョン・W. Jr., 村上祐子・塩谷賢訳『ロジカル・ディレンマ：ゲーデルの生涯と不完全性定理』新曜社 (2006). 原著：Dawson, John W. Jr., *Logical Dilemma*, AK Peters (1997). 膨大な資料に基づく緻密な伝記．

[ゲーデル全集] Feferman, S. *et al.* (eds.), *Kurt Gödel Collected Works*, Vols. I–V, Oxford Univ. Press (1986–2003).

[藤沢 1895] 藤沢利喜太郎『算術条目及教授法』丸善．三省堂 (1895).

[ジャキント 2007] ジャキント，M., 田中一之監訳『確かさをもとめて：数学の基礎の哲学的論考』培風館 (2007). 原著：Giaquinto, M., *The Search for Certainty; A philosophical account of foundations of mathematics*, Oxford Univ. Press (2002). 数学基礎論の歴史を知るための好書．

[Hilbert 1902] Hilbert, D., “Mathematical Problems,” *Bulletin of the American Mathematical Society*, **8** (1902), 437–479. 1900 年の国際数学者会議で配布されたフランス語の資料は，ドイツ語と英語に訳され，それぞれ学会誌に掲載された．

[飯田 1995] 飯田隆編『リーディングス・数学の哲学：ゲーデル以前』勁草書房 (1995). ゲーデルの二つの論文「カントールの連続体仮説とは何か」（岡本賢吾訳）と「ラッセルの数理論理学」（戸田山和久訳）を含む．

[砂田 1997] 砂田利一『バナッハ・タルスキーのパラドックス』岩波科学ライブラリー，岩波書店 (1997).

[竹内 1998] 竹内外史『ゲーデル』日本評論社 (1986). 新版版 (1998). ゲーデルについて個人的な思い出と独自の分析が語られる．

[田中（尚）2005] 田中尚夫『選択公理と数学』遊星社 (1987). 増訂版 (2005).

[遠山 1989] 遠山啓「クロネッカー」，数学セミナー増刊『100 人の数学者』日本評論社 (1989).

[ワン 1995] ハオ・ワン，土屋俊・戸田山和久訳『ゲーデル再考　人と哲学』産業図書 (1995). 原著：Wang, H., *Reflections on Kurt Gödel*, Cambridge, Mass. (1987). 晩年までゲーデルと交流をもっていたハオ・ワンによるゲーデル伝．

[ワインガルトナー 1992] ワインガルトナー他編，前原昭二・本橋信義訳『ゲーデルを語る』遊星社 (1992). Weingartner, P. and Schmetterer, L. (eds.), *Gödel Remenbered, Bibliopolis* (1987). ゲーデルをよく知る人たちによるゲーデルの思い出．

I

構成的集合と公理的集合論入門

渕野 昌



集合論は代数や幾何といった数千年の歴史をもつ他の数学の分野と比べて非常に新しい研究分野である．しかも，その始まりはカントルという 1 人の数学者によって，何もないところから成熟した研究分野として一気呵成に確立される，という他の数学の分野ではみられない劇的な始まり方をしている．

だが，集合論は研究分野として確立された後，平穏に着々と発展を遂げたわけではなかった．とくに，20 世紀の初頭には，集合論の論法として用いられていたものとほとんど区別のつかないいくつかの推論により矛盾する結果が導き出せることが発見されている．ラッセルのパラドクス，ブラリ・フォルティのパラドクス，カントルのパラドクスなどがそれである[1]．20 世紀初頭は全数学が集合論の上で展開できることが認識されはじめた時期でもあったので，これらの逆説(パラドクス)は「数学の危機」として認識されることになったのである．この「危機」を乗りこえるために，集合論で認容される論法を明確化することが早急の課題となり，集合論の公理系が整備されることになった（1.1 節を参照）．現在では，集合論は，1.2 節で述べるような公理系上の理論としてとらえられている．

集合論の成立の発端は，カントルによる実数の全体の集合の非可算性（つまり実数の全体が自然数の全体と一対一に対応づけられないこと）の発見（1873 年）であったが，実数の全体の集合と自然数の全体の集合のサイズの間には他の無限集合のサイズが存在しないことを主張する連続体仮説（2.7 節を参照）は，カントルの死後に未解決問題として残された．この問題の解決には，ゲーデルとコーエンの登場を待たなければならなかった．しかもここでの「解決」は，連続体仮説が集合論の公理系から独立である，ということの証明として得られており，ゲーデルの不完全性定理によって明らかになった，数学の不完全性という数学をとりまく深淵を垣間見させる最初の数学的な例の一つとなったのである．この経緯は，もう少しくわしく述べると，つぎのようなものであった．ゲーデルは 1930 年代に選択公理と一般連続体仮説が集合論の他の公理から無矛盾であることを証明している（[Gödel 1938; 1940] — 定理 4.9（p.134）を参照）[2]．さらに 1960 年代になると，コーエンは，強制

1) ラッセルのパラドクスについては，p.51 を参照されたい．

2) 『ゲーデル全集』[Feferman *et al.* 1995] の第 I 巻によると，選択公理の無矛盾性は

法を導入し，これを用いて選択公理と連続体仮説の集合論の他の公理からの独立性を証明した（[Cohen 1963; 1964] — 定理 4.17（p.144）を参照）．

ゲーデルとコーエンによるこれらの仕事は，連続体仮説の独立性の証明ということにとどまらず，20 世紀後半の集合論の研究全体の方向を決定づけるものとなった (本書の第 I 部の後半および第 II 部を参照)．さらに，[Gödel 1947/64] などで表明されているゲーデルの集合論に対する哲学的立場は，21 世紀の集合論の研究の上にも大きな影を投げかけているといえよう[3)]．

本書の第 I 部では，公理的集合論を導入し，ゲーデルの構成的集合の理論および強制法の理論について述べる．とくに第 1 章と第 2 章の記述は，それ以降の章や第 II 部と異なり，入門書ないし教科書風である．執筆にあたっては，できるかぎり自己完結した記述になることを目指したが，紙数の制限上，第 3 章の一部と第 4 章に証明の細部の記述などがスケッチ風になっている箇所が若干ある．そのような箇所でも，聡明な読者は自力で細部の再現が可能であることを期待するが，子細については，必要なら [Kunen 1980], [Jech 1978/2003] なども参照されたい．

上で「教科書風」と書いたが，ここで，本書第 I 部が，本シリーズの趣向を多少逸脱して，そのようないささか「堅い」書き方になっていることに対する弁明をしておきたいと思う．

本書をみても分かるように，集合論の研究結果では，「無限」，「絶対」，「宇宙」など，神学的ないし神秘主義的な響きをもつ用語や概念がきわめて頻繁に用いられることになる．そのため，直観に訴える「お話」的説明に終始したときに，集合論を新興宗教の教義のようなものととり違える人が多く出てきてしまうのではないかと恐れるのである．江戸時代の日本には「珠算の達人が蔵の前でそろばんをはたいたら蔵がひとりでにあいた」というような類の都市伝説（?）が流布したことがあったという話をどこかで聞いたことがある．これは昔の話であるが，現代においても，難しいものに神秘を求める性

1935 年，連続体仮説のそれは 1937 年 6 月になされている，ということである．なお，選択公理と，連続体仮説および一般連続体仮説については，それぞれ 1.1 節と 2.7 節を参照．

3) 本書第 II 部の第 1 章では，[Gödel 1947/64] に表明されたゲーデルの集合論に関する思想や研究指針（ゲーデルのプログラム）について考察されている．

向のある，ある種の人々においては，現代数学も迷信の対象となってしまう危険性を十二分に孕んでいるようである．集合論に関していうと，このような状況は，さらに具合の悪いものになっているように思える．集合論は，他の現代的な数学理論と同様，非数学者から擬似宗教のようなものとしての身に覚えのない扱いを受けてしまう危険性に曝されているだけでなく，「プロの」数学者からも，ある種の新興宗教のような「胡散臭い密議」というような（間違った）印象をもたれてしまっている場合が少なくないのではないかと思われる節すらあるからである．しかも，近代的，現代的な集合論は（少なくとも日本では）大学の数学科の正規の講義ではまったく教えられることがない，という事情が，この傾向に拍車をかけているように思われる．このような状況をふまえ，少なくとも集合論の基礎的な部分に関しては，本書においても技術的な細部を含むきちんとした記述がぜひとも必要であろうと考えた次第である．

ゲーデルは，とくに晩年，数学＝集合論の（プラトン的な理想界での）実存を信じる，という立場を強くもっていたようである．このことは，本書第II部第1章でのゲーデルによる [Gödel 1947/64] の分析や，第III部においてくわしく論じられることになる．しかし，まさにこの [Gödel 1947/64] のような，数学理論の哲学的な肉付けにおける肉付けの部分のみを解説した文章を，技術的細部をともなったその数学的な実体についての基礎知識なしに読んだ場合，これをオカルト的・擬似哲学的な文章と区別することは非常に難しいのではないかと思う．

紙数の制限もあり，第II部の第2章以降の記述は，技術的細部には触れない解説文的なものとなっているが，本書第I部での比較的きちんとした「教科書風」の記述は，第II部での議論の背後にある数学的な実体がどのようなものかを推し量ることができるために必要と思われる，最低線の基礎知識を提供するものとなることを目指しているものでもある．

第I部の原稿は複数の方々に試読していただき，多くの有用な意見をいただいた．とくに，（第I部を執筆した2005年当時）名古屋大学大学院情報科学研究科博士課程前期課程在学中だった池上大祐氏には，原稿の細部にわたって多くの示唆をいただいた．ここに感謝の意を表したい．

第1章 公理的集合論

本章では，公理的集合論の体系 ZFC を導入し，この体系で展開される数学のごく基礎的な部分について検証する．集合論の体系は，まず 1.1 節で「素朴な」やり方で導入された後，1.2 節で，形式化された厳密な体系として再導入される．

1.3 節では，クラスも対象として扱えるような集合論の定式化である体系 BGC を定義し，ZFC との関係について述べる．

BGC は，ベルナイスによって導入された体系で，[Gödel 1940] では構成的集合の理論の枠組として用いられているが，1.3 節でもみることになるように，その集合に関する部分は ZFC とまったく同等であることが知られており，[Gödel 1940] での議論も，ZFC ですべて問題なく行うことができる．

1.1 ツェルメロ・フレンケル集合論

以下で述べる公理系は，ツェルメロにより定式化され，フレンケルによりさらに拡張されて得られた体系に基づくもので，ZFC (英語読みでは “`zi:efsi:`”) と呼ばれている．‘Z’ と ‘F’ はこの 2 人の頭文字で，最後の ‘C’ は選択公理 (Axiom of <u>C</u>hoice) を表している．これに対し，ZFC から選択公理を除いた体系は ZF と呼ばれる．

公理的集合論では，考察の対象はすべて集合である，と考える．したがっ

て，以下で「ある x について $\cdots$」といったときには，「ある集合 x について $\cdots$」という意味である．

集合論では，対象の集まりかたのみが問題となる．そこで，二つの集合 a, b に対して「a が b の要素である」という帰属関係を唯一の基本的な述語として採用する．この関係を "$a \in b$" と表す．他の述語はすべて帰属関係（および，より基本的な同等関係 "$=$"）のみを使って定義される．$a \in b$ のとき a は b の元(げん)である，という言い方もする．さきほど，「集合論の考察の対象はすべて集合である」と述べたが，とくに集合の要素もまた何らかの集合であると考えていることに注意する．

集合論の公理系の一番最初の公理は，すべての集合はその要素の全体から一意に決まることを主張する外延性公理 (axiom of extension) と呼ばれるものである．

（外延性公理）　任意の x, y に対し，すべての z で，$z \in x$ と $z \in y$ が同値になるなら，$x = y$ である．

ZFC の他の公理は，すべて，「集合 $x_1, x_2, \ldots$ が与えられたとき，これらから $\cdots$ という性質をもつ集合をつくることができる」というタイプの主張（存在公理）となっている．

（空集合公理）　要素を一つももたないような集合が存在する．

外延性公理により，要素を一つももたない集合は存在すれば一意である．この一意に決まるところの，要素を一つももたないような集合を $\emptyset$ で表し，空集合 (empty set) と呼ぶ．

（対の公理）　任意の x, y に対し，x と y だけを要素としてもつような z が存在する．

対の公理 (pairing axiom) でその存在の保証された（これも外延性公理により一意に決まるところの）集合 z を $\{x, y\}$ と表す．とくに $x = y$ のときには，これを $\{x\}$ と書く．$\{x\}$ は「シングルトン (singleton) x」と呼ばれることもある．対の公理を用いて二つの集合 x, y の順序対 (ordered pair) を，

$\{\{x\},\{x,y\}\}$ として導入することができる．x, y の順序対も，外延性公理から，この定義により一意に決まるので，これを (x,y) と書く．集合論の最近の文献では，$\langle x,y\rangle$ という記号を用いることも多い．ここでも順序対には $\langle x,y\rangle$ の記法を用いることにする．順序対の定義は，必ずしもこれでなくてもよいのであるが，要点は，

$$(1.1) \quad \langle x,y\rangle = \langle x',y'\rangle \quad \Leftrightarrow \quad x = x' \text{ かつ } y = y'$$

という同値関係が成り立つことである．これに対し，$\{x,y\} = \{y,x\}$ だから，$\{x,y\}$ に対しては (1.1) に対応する性質は成り立たない．

（和集合の公理）　任意の x に対し，集合 y で，任意の z が y の元であることと，ある $u \in x$ が存在して $z \in u$ となることが同値になるようなものが存在する．

この公理は x を集合族とみて，その和集合 (union) y の存在を主張している（われわれの立場ではすべての集合は集合からなるので，集合と集合族の区別はないのであるが，要素を集合として扱っていることを強調するために「集合族」という言葉を使うこともある）．上のような y を $\bigcup x$ と表し，集合（族）x の和集合と呼ぶ．

とくに，$x = \{v,w\}$ のときには，上の公理での y は v と w の通常の意味での和集合 $v \cup w$ となる．

φ を集合に関する性質とするとき，つぎの分出公理 (axiom of separation) を考える[1)]．

（分出公理）$_\varphi$　$x_1,\ldots,x_n$ を固定するとき，任意の x に対し，x の元 z で $\varphi(z,x_1,\cdots,x_n)$ を満たすようなものの全体からなる集合 y が存在する．

上のような y はやはり φ と $x_1,\ldots,x_n$ が与えられると一意に確定する．そこでこれを

1)　ここで用いた「集合に関する性質」という言い回しは，あいまいで，さらに明確化されるべきものである．このことについては 1.2 節で再びコメントする．

$$y = \{z \in x : \varphi(z, x_1, \cdots, x_n)\}$$

と表す．

分出公理の応用として，たとえば，x と y を集合とするとき，x と y の差集合

$$x - y = \{z \in x : z \notin y\}$$

が存在することが分かる．また，x を空でない集合（族）とするとき，x の共通部分 $\bigcap x = \{z :$ すべての $y \in x$ に対し $z \in y\}$ も存在することが分かる．y_0 を x の一つの元とするとき，

$$\bigcap x = \{z \in y_0 : \text{すべての } y \in x \text{ に対し } z \in y\}$$

と表せるが，分出公理により，このような集合の存在は保証されるからである．

（無限公理）　集合 x で，空集合を元として含み，すべての $y \in x$ に対し，$y \cup \{y\} \in x$ となるようなものが存在する．

上のような集合 x は，無限公理 (axiom of infinity) の前半の仮定により $\emptyset \in x$ だから，無限公理の後半により，$\{\emptyset\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} \in x$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} \in x$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \in x, \ldots$ となり，直観的には x は無限個の元を含むものとなることが分かる．集合論では，自然数 (natural numbers) 0, 1, 2, ... を，それぞれ $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$ のこととして導入する[2]．したがって，無限公理で存在の保証された集合 x は 0, 1, 2, ... のすべてを含むものとなっている．そこで，このような x と分出公理を用いると，自然数の全体からなる集合

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

の存在が証明できる[3]．

2)　$0 = \emptyset$, $n + 1 = n \cup \{n\} = \{0, 1, \ldots, n\}$ となっていることに注意する．順序対のときと同様に，0, 1, 2, ... が具体的にはどのような集合として導入されているかはあまり重要ではない．ただし，ここでのように自然数を導入すると，自然数や無限順序数の理論が統一的かつ自然に展開できることが知られている（第 2 章を参照）．そのため，現代の集合論では，ここでの定義は広く用いられている．

3)　詳細については，p.74 を参照．

集合 x が集合 y の部分集合 (subset) であるとは，すべての z に対し，$z \in x$ なら $z \in y$ が成り立つこととし，これを $x \subseteq y$ で表す．たとえば，分出公理での $y = \{z \in x : \varphi(z, x_1, \cdots, x_n)\}$ は x の部分集合である．

（ベキ集合の公理）　任意の x に対し，そのベキ集合が存在する．つまり，集合 y で，すべての z に対し $z \in y \Leftrightarrow z \subseteq x$ となるようなものが存在する．

集合 x のベキ集合 (power set) を $\mathcal{P}(x)$ と表す．さきほど自然数の全体 $\mathbb{N}$ が集合としてとらえられることをみたが，たとえば，$\mathbb{N}$ の部分集合を実数の 2 進表示と対応づけて考えることにより（たとえば $X \subseteq \mathbb{N}$ で $2n+1$ が X の要素となっているときには X に対応する実数の 2 進表示での小数点以下 n 桁目の数字は 1 とする，などと決めることで），上の公理でその存在の保証された集合 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$（の適当な部分集合）から，実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ を，ここでの公理的集合論の枠組の中で構成することができることになる．

さきほどの順序対を思い出してみると，集合 a, b に対し，$x \in a, y \in b$ なら，$\langle x, y \rangle \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b))$ となる．したがって，ベキ集合の公理と分出公理を用いると，

$$\begin{aligned} a \times b &= \{\langle x, y \rangle : x \in a, y \in b\} \\ &= \{\langle x, y \rangle \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b)) : x \in a, y \in b\} \end{aligned}$$

として a と b の直積（デカルト積）の存在が示せる．これにより，たとえば，集合 $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{N}^3 = \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}, \ldots, \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \ldots$ などが集合論の中で扱える．また集合 a から集合 b への関数も，グラフ $f \subseteq a \times b$ として扱うことができる．つまり，$f \subseteq a \times b$ が a から b への関数 (function)（または写像 (mapping)）[4)]である，とは，

(1.2)　すべての $x \in a$ に対し，$\langle x, y \rangle \in f$ となるような $y \in b$ がちょうど一つ存在する

4)「関数」と「写像」という用語は本稿では区別せずに同意語として用いることにする．

こととして定義するわけである．f が a から b への関数のとき，これを $f:a\rightarrow b$ と書く．また，$x\in a$ なら $\langle x,y\rangle\in f$ となるような $y\in b$ は (1.2) により一意に決まるが，このような y を $f(x)$ と表す．関数 $f:a\rightarrow b$ に対し，集合 a は (1.2) により一意に決まるが，これを $\mathrm{dom}(f)$ で表し f の定義域 (domain) と呼ぶ．また，「f は a 上の関数である」という言い方もする．$f:a\rightarrow b$ で $c\subseteq a$ のとき，分出公理により

$$\{y\in b\ :\ f(x)=y\ \text{となる}\ x\in c\ \text{が存在する}\ \}$$

という集合が存在するが，この集合を c の f による像 (image) と呼ぶ．c の f による像は $f[c]$ と表されることも多いが，ここでは，[Gödel 1940] でも採用されている $f``c$ という記法で表すことにする．$f:a\rightarrow b$ のとき，任意の集合 X に対し，$f\restriction X=f\cap(X\times b)$ とする．$f\restriction X$ は，関数 f の X への（より正確には $a\cap X$ への）制限である．

分出公理により，${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}=\{f\in\mathcal{P}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})\ :\ f\ \text{は}\ \mathbb{R}\ \text{から}\ \mathbb{R}\ \text{への関数}\ \}$ や，$C(\mathbb{R})=\{f\in{}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}\ :\ f\ \text{は}\ \mathbb{R}\ \text{から}\ \mathbb{R}\ \text{への連続関数}\ \}$ などといった集合の存在も示せる[5)]．2.3 節で述べることになる数学的帰納法により，$\mathbb{N}$ 上には加法や乗法など算術的な構造を導入することができ，これらを $\mathbb{R}$ に拡張することにより，$\mathbb{R}$ の実数体としての構造が集合として規定できる．さらに，$\mathbb{N},\mathbb{R}$ などに関する数学で用いられるすべての基本性質は，後出の ZFC の言語 $\mathcal{L}_{\in}$ 上の論理式に翻訳でき，これらはすべて，ZFC から形式的に証明することができることになる[6)]．

このように続けることで，われわれが日常の数学で必要となる数学的対象は，すべて公理的集合論の枠組の中で扱えるようになる．ここではもちろんそのような展開をすべて示すだけの余裕はないが，以下で記号列と集合族の集合論での扱いについて，いくつか注意をしておくことにする．まず，集合 $x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}$ に対し，これらからなる n 組 $\langle x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}\rangle$ を

5)　より一般的には，A と B が集合のとき ${}^{B}A=\{f\ :\ f:B\rightarrow A\}$ も集合となる．

6)　p.48 で導入することになる用語を用いると，これは，数学で証明できる命題の $\mathcal{L}_{\in}$ への翻訳を φ とすると，$\mathrm{ZFC}\vdash\varphi$ が示せるということである．

(1.3) $$\underbrace{\langle\langle\cdots\langle}_{n-1\text{ 個}} x_0, x_1\rangle, x_2\rangle, \cdots\rangle, x_{n-1}\rangle$$

のこととして導入する．たとえば，$n = 3$ のときには，

$$\langle x_0, x_1, x_2\rangle = \langle\langle x_0, x_1\rangle, x_2\rangle$$

である．このように導入された n 組が，(1.1) に対応する性質をもつことは容易に示せる．X の要素の n 組の全体からなる集合を X^n と表す．X^n が実際に集合となることは，直積が集合となることの証明と同様に示せる．集合の n 組 $\langle x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle$ は，$n = \{0, \ldots, n-1\}$ から $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ への写像

(1.4) $$\{\langle 0, x_0\rangle, \langle 1, x_1\rangle, \ldots, \langle n-1, x_{n-1}\rangle\}$$

と同一視されることもある．この同一視により，集合 X の元の有限組の全体 $X^{<\omega}$ が

$$X^{<\omega} = \{f : \text{ある } n \in \mathbb{N} \text{ に対し，} \ f : n \to X\}$$

として定義できる[7]．有限列 s を関数ととらえたとき，$\mathrm{dom}(s)$ はある自然数 $n = \{0, \ldots, n-1\}$ となるが，これを $\ell(s)$ とも表す．$\ell(s)$ は有限列 s の長さである．また $m < \ell(s)$ に対し，s の $m = \{0, \ldots, m-1\}$ への制限 $s \restriction m$ は，s が $\langle s_0, \ldots, s_{n-1}\rangle$ のとき，$s \restriction m = \langle s_0, \ldots, s_{m-1}\rangle$ となる．

ある集合が有限列であることを強調したいときには，その集合をベクトル記号 $\vec{a}, \vec{x}, \ldots$ などで表すこともある．

ある集合 S の要素を記号とみなすとき，S の要素 $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}$ を並べた記号列 "$s_0 s_1 \cdots s_{n-1}$" を考察することが必要となることがある．このようなときには，S^n の元 $\langle s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}\rangle$ を，このような記号列とみなすことにする．

7) 2.3 節で述べられることになるように，"ω" は 順序数としてとらえたときの $\mathbb{N}$ を表す記号である．ちなみに，(1.3) での n は集合論の外側の「本物の」具体的な自然数 n であるのに対し，(1.4) での n は集合論の中の $\mathbb{N}$ の元としての n でありえることに注意しておく．

f を集合 I 上の関数とするとき，$i \in I$ に対し $X_i = f(i)$ と置き，f を集合族 $(X_i)_{i\in I}$ とみなすことができる．このとき，$\bigcup_{i\in I} X_i$ と $\bigcap_{i\in I} X_i$ をそれぞれ，

$$\bigcup_{i\in I} X_i = \bigcup\{f(i) : i \in I\}, \quad \bigcap_{i\in I} X_i = \bigcap\{f(i) : i \in I\}$$

により定義する．

ここまでで述べたZFCの公理と，以下に述べる選択公理だけからなる枠組の中でも，（ほとんど）すべての古典的数学の議論は展開できるのであるが，集合論ではさらにつぎの二つの公理を仮定する．

分出公理と同じように，つぎの置換公理 (axiom of replacement) も，集合に関する性質 $\varphi(x, y, z, x_0, \cdots, x_{n-1})$ 各々に対応する公理を集めた公理群である．

（置換公理）$_\varphi$　すべての集合 A と，c_0，$\ldots$，c_{n-1} に対し，任意の $a \in A$ をとったときに，$\varphi(a, b, A, c_0, \cdots, c_{n-1})$ となるような b が一意に決まるなら，集合 B で，$b \in B$ となることと，ある $a \in A$ に対し $\varphi(a, b, A, c_0, \cdots, c_{n-1})$ となることとが同値になるようなものが存在する．

置換公理でその存在の保証された集合 B は，φ, A, c_0, $\ldots$, c_{n-1} を固定するごとに一意に決まる．そこで，分出公理のときと同様に，このような B を，

$$\{b : \text{ある } a \in A \text{ に対し，} \quad \varphi(a, b, A, c_0, \cdots, c_{n-1})\}$$

と表すことにする．

置換公理は，分出公理の拡張になっており，実際，置換公理と他の集合論の公理から，分出公理の一つ一つの主張を導き出すことができる．これまでの他の公理と違い，置換公理は通常の数学の議論では用いられることが稀な公理である．古典的な数学ではこの公理が必要となることはない，と断言してもよいくらいである．しかし20世紀以降の数学では，たとえば，ボレル集合に関するいくつかの重要な結果などで，この公理が本質的に用いられてい

ることが知られている[8]．

置換公理の応用の一つとして，集合 x の推移的閉包 (transitive closure) の構成法をみてみることにする．

集合 x は，すべての $y \in x$ と $z \in y$ に対し，$z \in x$ が成り立つとき，推移的 (transitive) であるという．集合 x' が集合 x の推移的閉包であるとは，x' は推移的で，$x \subseteq x'$ となり，すべての推移的な $x'' \supseteq x$ に対し $x' \subseteq x''$ が成り立つことである．

x を含む推移的な集合が存在すれば，x の推移的閉包は

$$\bigcap \{x' : x \subseteq x' \text{ で } x' \text{ は推移的}\}$$

として得られる．とくに x の推移的閉包は存在すれば一意である．

補題 1.1 すべての集合 x に対し，その推移的閉包が存在する．

証明 $n \in \mathbb{N}$ に対し，

$$t(n,x) = \{y : \langle x_k : k \leq n+1 \rangle \text{ で } k \leq n \text{ なら } x_{k+1} \in x_k \text{ となり，} \\ x_0 = x,\, x_{n+1} = y \text{ となるものが存在する}\} \tag{1.5}$$

とする．すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し $t(n,x)$ が集合となることは，$n \in \mathbb{N}$ に対する帰納法で示せるから[9]，$n \mapsto t(n,x)$ を表す，置換公理の定義でのような φ がとれる．したがって，置換公理により，$z = \{t(n,x) : n \in \mathbb{N}\}$ となる集合 z が存在する．$x' = \bigcup z'$ とすれば，x' が x の推移的閉包となることは容易に示せる． ■

x の推移的閉包を $tcl(x)$ で表すことにする．

つぎの基礎の公理 (axiom of foundation) と呼ばれるものも，通常の数学の議論ではほとんど用いられることがないものである．

（基礎の公理） 空集合でない任意の集合 x に対し，$y \in x$ で，どんな $z \in x$ をとってきても $z \in y$ とならないようなものが存在する．

8) [Friedman 1971] を参照．ただし，以下でもみることになるように，集合論（的数学）での議論では，この置換公理も縦横に用いられることになる．

9) 帰納法については，2.2 節を参照．

上での y のようなものを x の $\in$ に関する極小元 (minimal element) と呼ぶことにする．

基礎の公理から，すべての集合 z に対し $z \in z$ とはならないことが分かる．もし $z \in z$ となる集合 z が存在したとすると，$x = \{z\}$ は基礎の公理の反例になってしまうからである．また，集合の列 $z_0, z_1, z_2, \ldots$ で，$z_n \ni z_{n+1}$ がすべての $n \in \mathbb{N}$ に対し成り立つなら，$x = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ とすると，x は基礎の公理の反例になってしまう．したがって，基礎の公理のもとでは，このような集合列も存在しない．

基礎の公理は技術的な理由で付け加えられた公理といえるが，この公理を集合論の公理系に加えることの妥当性は，

(1.6) $tcl(x)$ の空でない任意の部分集合が $\in$ に関する極小元をもつような集合 x の全体が，基礎の公理を含む集合論の公理系の「モデル」になること[10) — とくにこのことから，ZFC から基礎の公理を除いたものが矛盾しないなら，(基礎の公理も含む) ZFC も矛盾しないことが示せる[11)；

(1.7) 上で定義した $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, ... など集合論の枠組の中で通常の数学を展開するのに必要となる集合は，すべて (1.6) のような性質をもつものになっていること；

(1.8) 基礎の公理ですべての集合に対して成り立つことの主張されている性質を満たさない集合の存在を保証する公理を集合論の他の公理に付け加えても，(1.6) の性質をもつ集合の間の「内的」な関係として表せる数学的性質に関しては何ら新しい結論が得られないこと[12)

により保証されている，と考えることができる．

現代の数学的議論ではつぎの選択公理が頻繁に用いられる．

---

10) 「モデル」という用語については，p.106 を参照されたい．

11) 定理 3.10 と定理 3.11 を参照．

12) 第 3 章で導入されることになる概念を用いて表現すると，(1.6) の性質をもつ集合の全体は ZFC を満たす推移的なクラスとなり，このクラスに属す集合をパラメタとして含む Δ_1 論理式によって表すことのできる性質は，このクラス上で絶対的となる．

（選択公理）　空集合を要素として含まないような任意の集合 x に対し，x から $\bigcup x$ への写像 f で $f(z) \in z$ がすべての $z \in x$ に対し成り立つようなものが存在する．

このような f は，集合族 x の一つ一つの要素 z から z の「代表元」$f(z)$ を選び出す関数となっている．選択公理 (Axiom of Choice) は AC と略記されることが多い．

選択公理は，ツェルメロがこの公理を定式化した当初からいろいろと物議をかもした公理である．バナッハ・タルスキのパラドクスなど，われわれの物理的直観と相容れない結果を導くこともあるため，問題視されることもある．それにもかかわらずこの公理が通常仮定されるのは，

(1.9)　後述のゲーデルの構成的集合に関する結果から，ZF と ZFC とは無矛盾性に関して等価であることが示せること[13]；

(1.10)　ショーンフィールドの絶対性定理により，集合論での命題として表したときにそれほど複雑な形にならない数学的命題については[14]，ZFC での証明が得られれば，それから選択公理を用いない証明をつくりなおすことができること；

(1.11)　選択公理のオルタナティヴと考えられる決定性公理の成り立つ世界は，選択公理の成り立つ集合論の「宇宙」の内部モデルとしてとらえることができること — ウッディンによる（本書第 II 部を参照）；

そして何よりもまず，

(1.12)　選択公理の仮定のもとで展開される数学が非常に豊かなものであること，

などがその理由としてあげられるだろう[15]．選択公理なしでは証明できない

13)　定理 4.9 を参照．

14)　正確には，$\mathcal{H}(\aleph_1)$ の元をパラメタとして含む Σ_1 論理式を $\mathcal{H}(\aleph_1)$ で相対化したもので表せるような命題．ただし，$\mathcal{H}(\aleph_1)$ は，集合 x で x の要素，x の要素の要素，x の要素の要素の要素などのすべてが可算な集合の全体からなる集合である．古典的数学で扱われる命題のほとんどはこのような形に表せる．

15)　p.84 の脚注 33 も参照されたい．

命題の例としては，線形空間の基底の存在定理や極大イデアルの存在定理，ハーン・バナッハの定理，非可測集合の存在定理などがあげられる．

1.2 集合論の1階の論理での公理化

以上で集合論の公理系 ZFC の公理をすべてみたわけであるが，ここで，保留していた，分出公理と置換公理における「集合に関する性質」というあいまい表現の問題の解決について述べておきたいと思う．分出公理や置換公理の個々の適用の際には，具体的な集合の性質が与えられるので，問題がなさそうにも思えるが，これでは，何を「集合に関する性質」と考えてよいのか，という指針がまったく与えられておらず，ZFC の公理系の外延が定かにならない．

ツェルメロとフレンケルによる公理系の定式化は，上で述べたような問題の残ったものであった．現在知られているような厳密な意味での公理系としての ZFC の再構成がなされたのは，[Skolem 1923] においてで，そこでは，その当時新興の形式論理学で1階の論理（1階述語論理）と呼ばれる論理体系が用いられた．

1階の論理については，本シリーズ第2巻でもくわしく述べられているので，ここでは，必要となる基本的な事項のみを簡単に述べるにとどめる．

数学の記述に関連する論理体系は，そこでどれだけの集合論的概念をアプリオリなものととらえるかに従って，いくつもの種類のものが考えられる．1階の論理は，そのうち論理体系としては集合論的な概念をいちばん何も内包しないものとなっている．このことは，もちろん集合論の記述の基礎として用いる論理としての理にかなっているといえる．

1階の論理は他の論理と同じように，その論理式（命題や述語を表す記号列）とそれらの間の演繹関係の定義によって与えられる．集合論における論理式の全体は，つぎのように帰納的に（つまり記号列の複雑さに関する帰納法により）導入することができる．

まず無限個の変数（記号）を用意しておく，これを使って，

(1.13) x, y が変数なら，表現 $x = y, x \in y$ は集合論の論理式である（以下では簡単のために「集合論の」は略す）；

(1.14) φ, ψ が論理式なら，$(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \to \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi), \neg\varphi$ は論理式である；

(1.15) φ が論理式で x が変数なら $\exists x\varphi, \forall x\varphi$ は論理式である[16)]；

(1.16) 集合論の論理式は (1.13), (1.14), (1.15) のくり返し適用により得られるもののみである

とする．より一般的には，(1.13) で，$\in$ に加えて，あるいは $\in$ の代わりに，それ以外の述語記号や関数記号などを導入することで，集合論以外の他の理論に対する 1 階の論理の体系も導入できる．ここでは，上のようにして与えられた集合論のための 1 階の論理の体系を $\mathcal{L}_\in$ と表し，ここで導入された論理式を $\mathcal{L}_\in$ 論理式 ($\mathcal{L}_\in$-formula) とも呼ぶことにする．

$\mathcal{L}_\in$ 論理式 φ に現れる変数のうち φ の部分論理式[17)]で $\exists x\psi$ または $\forall x\psi$ という形をしたものの中に，ここでの x として現れていないようなものを φ の自由変数 (free variable) という．φ の自由変数が $x_0, \ldots, x_{n-1}$ にすべて含まれるとき，φ を $\varphi(x_0, \cdots, x_{n-1})$ とも表す[18)]．$\mathcal{L}_\in$ 論理式 φ は，自由変数を含まないとき，$\mathcal{L}_\in$ 文 ($\mathcal{L}_\in$-sentence)，$\mathcal{L}_\in$ 命題，あるいは，$\mathcal{L}_\in$ 閉論理式 (closed $\mathcal{L}_\in$-formula) であるという．$\mathcal{L}_\in$ 文の集まりを（$\mathcal{L}_\in$ での）公理系 (system of axioms)，あるいは理論 (theory) という．

上の論理式の定義 (1.13)–(1.16) での $\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, \neg, \exists x\ (\cdots), \forall x\ (\cdots)$ は，それぞれ「かつ」，「または」，「ならば」，「同値」，「でない」，「x が存在して $\cdots$」，「すべての x に対し $\cdots$」と読み下され，そのような意味に解釈さ

16) "∃" と "∀" はそれぞれ，存在記号，全称記号と呼ばれる．また，存在記号や全称記号を変数と組にして並べた "$\exists x$" と "$\forall x$" の形のものは，それぞれ存在量化子 (existential quantifier)，全称量化子 (universal quantifier) と呼ばれる．

17) $\mathcal{L}_\in$ 論理式 φ の (1.13)–(1.15) のくり返し適用による構成の過程で現れる論理式を φ の部分論理式 (subformula) という．厳密には，このような意味の φ 部分論理式の全体を，φ の構成に関する帰納法により導入することで，部分論理式の概念を定式化できる．

18) この記法では，断らない限り，$x_0, \ldots, x_{n-1}$ など異なる記号で表された変数記号は互いに異なるものとする．

れるべきものである[19]．このような解釈により，集合論の公理を上で導入したような論理式に翻訳する．たとえば，外延性公理と空集合公理は，それぞれ，$\forall x \forall y\,(\forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$, $\exists x \forall y\,(\neg y \in x)$ という論理式で表すことができる．分出公理は，$\mathcal{L}_\in$ 論理式 $\varphi(z, x_1, \ldots, x_n)$ の一つ一つに対し，論理式

$$(1.17)\quad \forall x \forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y \forall z\,(z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z, x_1, \cdots, x_n)))$$

を公理として加えることで導入できる[20]．

同様に，置換公理は，$\mathcal{L}_\in$ 論理式 φ の一つ一つに対し，論理式

$$(1.18)\quad \forall u \forall x_1 \cdots \forall x_n ((\forall x \in u) \exists ! y (\varphi(x, y, x_1, \cdots, x_n)) \\ \to\ \exists v \forall y (y \in v \leftrightarrow (\exists x \in u)(\varphi(x, y, x_1, \cdots, x_n))))$$

を公理として加えることで導入できる[21]．

ここでは，1.1 節で「集合に関する性質 φ」と述べたものは「$\mathcal{L}_\in$ 論理式 φ」で置き換えられているわけだが，後者による分出公理や置換公理の導入は，$\mathcal{L}_\in$ 論理式の意味が (1.13)–(1.16) により導入されていることに注意すると，外延の確定したものとなっていることが分かる．とくに $\mathcal{L}_\in$ の勝手な論理式が与えられたとき，この論理式が ZFC（の論理式の全体）に属すかどうかが判定可能である．

1 階の論理での論理式による推論（あるいは証明）の概念も，つぎのようにして規定することができる．ここでは列挙はしないことにするが，たとえば

> φ と $\varphi \to \psi$ がすでに結論されていれば，それから ψ を結論することができる

19) つまり以下で述べる推論規則など，すべてこの解釈が妥当なものになるように定義する．

20) ただし，これらの論理式では，可読性のためにいくつかの括弧が省略されている．

21) (1.18) では，つぎの略記法が用いられている．論理式 η に対し，$(\exists x \in u)\eta$ は，「u の元 x が存在して η を満たす」を意味すべきもので，こう書いて，論理式 $\exists x (x \in u \wedge \eta)$ を表すことにする．また，$\exists ! x \eta$ は，「$\eta(x, \cdots)$ を満たすような x は一意に存在する」を意味すべきもので，論理式 $\exists x \eta(x, \cdots)\ \wedge\ \forall x_0 \forall x_1 (\eta(x_0, \cdots) \wedge \eta(x_1, \cdots) \to x_0 = x_1)$ のこととする．

を表す

(1.19) $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$

など，推論のパターンを有限個集めた「推論規則の体系」$\mathcal{R}$ を具体的に与えることができる．ここで，論理式 φ の論理式の集合 T からの証明 (proof) とは

(1.20) 論理式の列 $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ で，φ_n は φ と等しく，各 $\varphi_i, i \leq n$ は，T に属すか，または $j_0, \ldots, j_{k-1} < i$ で，$\varphi_{j_0}, \varphi_{j_1}, \ldots, \varphi_{j_{k-1}} \vdash \varphi_i$ が $\mathcal{R}$ に含まれる推論規則の一つのパターンとマッチするものとなっているようなものがとれるようなもの

のこととする．

φ の T からの証明が存在するとき，φ は T の定理である，といい，これを $T \vdash \varphi$ と書く．T が空の公理系（つまり公理を一つも含まない公理系）のときには $T \vdash \varphi$ を $\vdash \varphi$ と書く．T が有限個の論理式 $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ からなるときには，$T \vdash \varphi$ を $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1} \vdash \varphi$ とも書くことにする．$T \vdash \varphi$ のときには，φ の T からの証明は有限的だから，この証明に含まれる有限個の論理式を $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ とすると，$\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1} \vdash \varphi$ となる．

推論規則体系が妥当に与えられているときには，$\vdash \varphi$ は「φ が（論理的に）恒真であることの証明がある」ということの表明となり，ZFC $\vdash \varphi$ なら，つまり，φ が ZFC の定理なら，φ の ZFC からの上の意味での形式的な証明は φ の数学的な証明と解釈することができ，φ の表現している数学的事実は数学的定理であると考えてよい[22)]．

なお，上の論理式の定義では，“$\emptyset$”, “$\subseteq$”, “$\mathcal{P}(\cdot)$” などの記号は許されていないが，これらは，コンピュータ言語でのマクロのようなものとして体系に導入されているものと考える．とくに，これらの記号を使った論理式は，必要なら（述語記号として “$\in$” と “$=$” のみが用いられているような）$\mathcal{L}_\in$ 論理

22) 論理式 φ などが自由変数を含む場合には，$T \vdash \varphi$ の解釈は推論規則の体系 $\mathcal{R}$ により異なることがあるが，ここでは，$T \vdash \varphi$ をそこに現れる自由変数を含む論理式 $\psi(x_0, \cdots, x_{n-1})$ の各々をその全称閉包 $\forall x_0 \cdots \forall x_{n-1} \psi(x_0, \cdots, x_{n-1})$ で置き換えて得られる $T' \vdash \varphi'$ と同値になるよう，$\mathcal{R}$ が導入されているものと仮定する．

式に書きなおせる[23]．

数学的なアイデアの豊かさを思いおこすと，このような形式的証明の体系はいかにも貧弱な印象を与えるかもしれない．しかし，驚くべきことに，ゲーデルの完全性定理 [Gödel 1930] が保証しているように，（1 階の論理体系として知られている標準的な推論規則集 $\mathcal{R}$ に関して）すべての数学的命題について，その数学的証明が存在すれば，(その証明が正しいものであるかぎり）対応する $\mathcal{L}_\in$ 論理式 φ の（形式体系 $\mathcal{R}$ での）ZFC からの証明が存在する！

ZFC をこのような形式体系として認識し研究する分野はとくに公理的集合論 (axiomatic set theory) と呼ばれる．これに対し，1.1 節で述べたような記述により形式体系を意識せずに議論を行うことを素朴集合論 (naïve set theory) と呼ぶことがある[24]．集合論の古典的な結果の多くは，素朴集合論的立場からでも十分に理解可能である．たとえばつぎの第 2 章で述べることがらのほとんどは，この立場で理解可能である．一方，第 4 章で述べることになる構成的集合の理論や強制法の理論の正確な記述や理解には，1 階の論理による集合論の公理化が必要不可欠である．

公理的集合論による数学の形式化に対する一般的な注意を，もう一言だけ述べておきたい．

「全数学は公理的集合論の形式体系の中に埋め込める」という主張は，一部の数学者にとって，「人間の祖先は猿だった」という主張に対してかつてのヨーロッパの多くの人々が感じたと思われるものと同種の不快感を呼び起こさせるもののようである．「数学」という言葉を聞いただけで不快感をつのらせる人々も多数いる（らしい）という現実を思い出せば，このこと自体，何ら不思議でないのかもしれないが，単純な誤解がこの不快感の原因になっている場合も多いように思える．つまり，「全数学は公理的集合論の形式体系の中に埋め込める」という主張が，「全数学は公理的集合論の形式体系の中での記号操作として行われなくてはいけない」という主張ととり違えられてしまっ

23) コンピュータ用語とのアナロジーを続ければ，「マクロ展開できる」ということである．

24) 「ナイーヴ」という日本語の単語はポジティヴな意味をもつことも多いが，欧米語の naïve は主にネガティヴな意味をもつ形容詞である．

ていることが少なくないのではないかと思うのである．しかし，「全数学は公理的集合論の形式体系の中に埋め込める」という事実の指摘は，「でき上がった数学を（必要なら）そのような体系の中に形式的に記述でき，そのことにより，数学理論の整合性（の度合）などを客観的に議論できるようになる」，ということをいっているにすぎず，数学者がこの体系での記述のように考えなくてはいけないということを意味しているものではまったくないのである．

逆に，形式体系の厳密性に魅力を感じる読者の中には，以下の議論が厳密な形式的記述によってなされていないことに不満を感じる者もあるかもしれない．集合論では，形式体系の記述能力の限界ぎりぎりのアクロバットを行うことも多いので，口語的な表現で述べられた議論が実際に体系の中で展開できることを入念に確かめることがぜひとも必要となる場合も多い[25)]．しかし，数学は機械のためにあるのではなく，われわれの「考える脳」のためのものなのであるから，直観的な把握と形式的記述の間を自由に行き来してファンタジーの飛翔がうながされるような理解の仕方を工夫することは非常に重要である．この点に関して，集合論研究における研究者の思考の生理学は，他の数学の分野におけるそれとまったく同様である．

1.3　クラスとベルナイス・ゲーデル集合論

分出公理や置換公理は，ある条件を満たす $\varphi(x,\cdots)$ について $\{x:\varphi(x,\cdots)\}$ という形で導入できる集合の存在を保証しているが[26)]，この形の集合がすべての $\varphi(x,\cdots)$ に対して存在するわけではない．たとえば $\varphi(x)$ として $x=x$ を考えると，$\{x : x=x\}$ はすべての集合からなる集合とならなくてはならない．しかし，このようなものが存在しえないことは，ラッセルのパラドクス (Russell's paradox) として知られているつぎのような議論により示せる．

25)　集合論の形式体系での記述の検証を細かく行うスタイルをとっている教科書には，[Takeuti and Zaring 1971] がある．

26)　たとえば，分出公理で存在の保証されている集合は $\{z\in x : \varphi(z,x_0,\cdots,x_{n-1})\}$ という形で表されるが，これは，$\{z : z\in x \wedge \varphi(z,x_0,\cdots,x_{n-1})\}$ と書きなおすことができる．

もし$V = \{x : x = x\}$という集合が存在するとすれば，分出公理により，$X = \{x \in V : x \notin x\}$も集合となる．もし，$X \in X$とすれば，$X$の定義から$X \notin X$となり矛盾である．そうでなければ，$X \notin X$であるが，$X$の定義から，$X \in X$となってしまい，やはり矛盾である．

また，たとえば，$\mathcal{G} = \{\langle G, \circ\rangle : \langle G, \circ\rangle$ は群である $\}$となるような集合$\mathcal{G}$も存在しないことが示せる[27]．それにもかかわらず，Vや$\mathcal{G}$をあたかも集合であるかのように用いることがある．この場合，たとえば，「ある$x \in V$に対し」あるいは「ある$G \in \mathcal{G}$に対し」などといったときには，これらは，「ある（集合）xに対し」あるいは「ある群Gに対し」という言い回しの単なる言い換えとみなすことができるからである．

このように「方便」として導入された「集合もどき」のことをクラス (class) と呼ぶ．$X = \{x : \varphi(x, \cdots)\}$のとき，$X$を$\varphi(x, \cdots)$のクラスと呼ぶことにする．クラスのうちには，実は集合となるものもあるが，Vや$\mathcal{G}$のように集合でないものを，真のクラス (proper class) という．

真のクラスは集合ではないので，集合やクラスの元になることはない．また，「すべてのクラスXに対し$\cdots$」や「あるクラスXに対し$\cdots$」などは，$\mathcal{L}_\in$では表現すらできない．

これに対し，集合に対して導入された演算のうちには，クラスに対しても有効なものもある．たとえばCを空でないクラスとして，$C = \{x : \varphi(x, a_0, \cdots, a_{n-1})\}$となっているとするとき，$\bigcap C$は集合となる．$x_0$を$\varphi(x_0, a_0, \cdots, a_{n-1})$となるようなものの一つとするとき，$\bigcap C$は

$$(1.21) \quad \bigcap C = \{z \in x_0 : \forall x(\varphi(x, a_0, \cdots, a_{n-1}) \to z \in x)\}$$

と表せるが，分出公理により，これは集合である．

クラスに対する（有限的な）ブール演算の結果もクラスである．たとえば，Xが$\varphi(x, \cdots)$のクラスでYが$\psi(x, \cdots)$のクラスであるとき，$X \cap Y$は$\varphi(x, \cdots) \wedge \psi(x, \cdots)$のクラスとなる．

---

27) このことは，2.4 節で述べることになる基数の概念を用いると，1. 任意の濃度（p.82を参照）の群が存在すること，および，2. 基数の全体からなるクラス Card は真のクラスである（補題 2.36），という事実から示すことができる．

分出公理は,「任意の集合 x とクラス X の共通部分 $x \cap X$ は集合である」と表現することもできる.

基礎の公理の命題の「任意の集合 x」を「任意のクラス X」で置き換えたつぎの形のものも基礎の公理のもとで成り立つ.

(1.22) 任意の空でないクラス X に対し,$y \in X$ で,どんな $z \in X$ をとってきても $z \in y$ とならないようなものが存在する[28].

もちろん「任意の空でないクラス X」というのはここでも方便にすぎず,一つ一つの論理式 φ に対する φ のクラス X についての (1.22) に対する $\mathcal{L}_\in$ の文を集めたものが (1.22) の実体である.(1.22) はつぎのように証明できる.X を空でないクラスとするとき,$y' \in X$ がとれるが,$x = tcl(\{y'\}) \cap X$ とすれば,$x \neq \emptyset$ だから基礎の公理により x の $\in$ に関する極小元 y がとれるが,y は X の $\in$ に関する極小元でもある.

以下では $\mathcal{L}_\in$ での理論 T で ZFC 以外のものに関して議論することもあるが,このような場合にも,同様にクラスを考えることにする.つまり T で X が $\varphi(x, \cdots)$ のクラスのとき,“$a \in X$” は $\varphi(a, \cdots)$ の言い換えのこととするわけである.

ZFC ではクラスが略記法にすぎないのに対し,クラスをオブジェクトとして認める集合論の定式化もいくつか存在する.ベルナイス・ゲーデル集合論 (Bernays-Gödel set-theory; BG) と呼ばれる体系もそのようなものである.[Gödel 1940] では,第 4 章で述べることになる構成的集合の理論や一般連続体仮説の集合論からの無矛盾性証明は,この体系の上で証明されている.そこで,ここでは,BG の体系とその ZFC との関係についてみておくことにする.

BG はベルナイスによる [Bernays 1937] で導入された公理系で,上記のように [Gödel 1940] で基礎となる公理系として採用されている.[Gödel 1940] では,BG の定式化は,クラスを表す変数の集まりと,これとは共通部分をもたない,集合を表す変数の集まりをもつ論理体系の上で行われている.し

28) 基礎の公理のときと同様に,このような y は X で $\in$ に関し極小である,ということにする.

かし，変数はクラスの上を走るものと思い，クラスが集合であることを表す（たとえば $\mathtt{set}(\cdot)$ という）1 変数述語記号を導入することで，通常の 1 階の論理の枠組の中で同等の公理系を定式化することができる．

ここでは，$\mathcal{L}_{\mathrm{BG}}$ で，$\in$ と $\mathtt{set}$ を述語記号としてもつ 1 階の論理での言語を表すことにして，$\mathcal{L}_{\mathrm{BG}}$ 文からなる公理系 BG を以下の (1.26)–(1.34) により導入する．このために，まずつぎの定義をしておく．$\mathcal{L}_{\in}$ の論理式 φ に対し $\mathcal{L}_{\mathrm{BG}}$ の論理式 $\varphi^{\mathtt{set}}$ を帰納的につぎのように定義する．

(1.23) φ が $x = y$ または $x \in y$ なら，$\varphi^{\mathtt{set}}$ は φ 自身である；

(1.24) φ が $(\psi \wedge \eta)$ または，$(\psi \vee \eta)$ または，$(\psi \to \eta)$ または，$(\psi \leftrightarrow \eta)$ または，$\neg\psi$ の形をしているときには，$\varphi^{\mathtt{set}}$ はそれぞれの場合に応じて，$(\psi^{\mathtt{set}} \wedge \eta^{\mathtt{set}})$ または，$(\psi^{\mathtt{set}} \vee \eta^{\mathtt{set}})$ または，$(\psi^{\mathtt{set}} \to \eta^{\mathtt{set}})$ または，$(\psi^{\mathtt{set}} \leftrightarrow \eta^{\mathtt{set}})$ または，$\neg\psi^{\mathtt{set}}$ とする；

(1.25) φ が $\exists x\psi$ または，$\forall x\psi$ の形をしているときには，$\varphi^{\mathtt{set}}$ はそれぞれの場合に応じて $\exists x(\mathtt{set}(x) \wedge \psi^{\mathtt{set}})$ または，$\forall x(\mathtt{set}(x) \to \psi^{\mathtt{set}})$ とする．

BG の公理は以下の (1.26)–(1.34) のこととする．ただし $*$ の印のついた場所については，$\mathcal{L}_{\in}$ の論理式として表された，ZFC の対応する公理 φ に対し，$\varphi^{\mathtt{set}}$ と表される $\mathcal{L}_{\mathrm{BG}}$ の論理式を公理として採用するものとする．また † の印のついた場所については，$\mathcal{L}_{\in}$ の論理式として表された，ZFC の対応する公理 φ をそのまま公理として採用するものとする．

(1.26) $(\text{外延性公理})^{\mathrm{BG}}$ †

(1.27) $(\text{集合の公理})^{\mathrm{BG}}$ $\forall x \forall y(x \in y \to \mathtt{set}(x))$

(1.28) $(\text{対の公理})^{\mathrm{BG}}$ $*$

各 $\mathcal{L}_{\in}$ の論理式 $\varphi(x, x_1, \cdots, x_n)$ に対し，つぎの公理を採用する[29)]．

(1.29) $(\text{分出公理})^{\mathrm{BG}}_{\varphi}$

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y \forall x \left(\mathtt{set}(x) \to (x \in y \leftrightarrow \varphi^{\mathtt{set}}(x, x_1, \cdots, x_n))\right)$$

29) 実は BG は有限個の公理による公理化が可能である．

(1.30)　(無限公理)$^{\mathrm{BG}}$　$*$

(1.31)　(和集合の公理)$^{\mathrm{BG}}$　$*$

(1.32)　(ベキ集合の公理)$^{\mathrm{BG}}$　$*$

"F はクラス関数" をつぎの論理式とする．

$$\forall x(x \in F \to \exists u \exists v\,(x = \langle u, v\rangle)) \wedge$$
$$\forall u \forall v \forall w\,(\langle u, v\rangle \in F \wedge \langle u, w\rangle \in F \to v = w)$$

また，$z = F``x$ をつぎの論理式とする．

$$\forall v\,(v \in z \leftrightarrow \exists u\,(u \in x \wedge \langle u, v\rangle \in F))$$

ただし，$\langle u, v\rangle$ は ZFC でと同じように導入されているものとする．

(1.33)　(置換公理)$^{\mathrm{BG}}$
　$\forall x \forall F\,(\mathtt{set}(x) \wedge$ "F はクラス関数" $\to \exists y\,(\mathtt{set}(y) \wedge y = F``x))$

(1.34)　(基礎の公理)$^{\mathrm{BG}}$　†

BG のセッティングでは ZFC の選択公理よりみかけ上強い，すべての集合に対する選択関数の存在を主張するつぎの公理を記述することができる．

(1.35)　(選択公理)$^{\mathrm{BG}}$
　$\exists F\,($"F はクラス関数" $\wedge\ \forall x(\mathtt{set}(x) \wedge x \neq \emptyset \to F(x) \in x))$

BG に上の選択公理を加えたものを BGC と呼ぶことにする．これに対し，ZF の選択公理を表す論理式を AC として，BG に $(\mathrm{AC})^{\mathtt{set}}$ を加えたものを BGC$'$ と呼ぶことにする．

ZFC と異なり，BG は有限個の公理で公理化可能なことが知られている ([Gödel 1940] を参照)．

つぎの定理により，BG と ZF または BGC と ZFC は（集合に対する命題に関しては）まったく同等な公理系になっていることが分かる．とくに，BG

とZFまたはBGCとZFCは無矛盾性に関して等価である（つまり片方の無矛盾性からもう片方の無矛盾性がいえ，逆も成り立つ[30)]）．

定理 1.2　φ を $\mathcal{L}_\in$ の文とする．このとき，つぎの同値が成り立つ．

(1)　$\mathrm{ZF} \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathrm{BG} \vdash \varphi^{\mathbf{set}}$

(2)　$\mathrm{ZFC} \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathrm{BGC} \vdash \varphi^{\mathbf{set}}$

証明　証明のスケッチのみを示す．

(1)：$\Rightarrow$)：ZFの公理 φ のすべてに対し，$\mathrm{BG} \vdash \varphi^{\mathbf{set}}$ が容易に示せるからよい．$\Leftarrow$)：ZFの（十分に大きな有限部分の）モデルはモデルで定義可能な部分集合のすべてをクラスとして付加することでBGの（対応する十分に大きな有限部分の）モデルにできることを使えばよい．

(2)：$\Rightarrow$)：(1)の"$\Rightarrow$"と，$\mathrm{BGC} \vdash (\mathrm{AC})^{\mathbf{set}}$ によりよい．$\Leftarrow$)：(1)の"$\Leftarrow$"と同様にして，ZFCの（十分に大きな有限部分の）モデルが与えられたとき，BGC$'$の（対応する十分に大きな有限部分の）モデル M が（ZFCの中で）構成できるが，このモデルから出発して，新しい集合を付け加えないようなクラス強制法 (class forcing) により[31)]，(1.35) でのような選択関数を付加することで，M をBGCの（対応する十分に大きな有限部分の）モデルに拡張することができる．■

30)　二つの理論 T, T' の間にこのような関係があるとき，T と T' は同じ無矛盾性の強さをもつ，あるいは，無矛盾等価 (equiconsistent) であるという．

31)　強制法については4.2節を参照．クラス強制法は強制概念がクラスであるような強制法のことである．

第2章
公理的集合論の展開

前章でも述べたように，公理的集合論の枠組の中で，従来の数学が（ほとんど）すべて展開できる[1]．本章ではそのような数学のうち，順序数や基数の理論の ZFC での展開をみておくことにする．以下の 2.1 節から 2.3 節までは，選択公理も基礎の公理も用いられていない．2.4 節以降では部分的に選択公理が用いられるが，そのような場合には，選択公理が用いられていることを注意することにする．

2.7 節では連続体仮説と，そのいくつかの帰結，また解析学や線形代数学の言葉による，連続体仮説のいくつかの特徴付けについて考察する．

1）逆に，ある数学理論が集合論の中で展開できないときには，その理論の基礎付けに関する別途の考察が必要となるであろう．

集合論の中に（そのままでは）展開できない数学理論としては，たとえばカテゴリー論やニュー・ファウンデーションとして知られている ZFC と両立しない集合論の体系などがあげられる．しかし，カテゴリー論は，BGC での理論，あるいは，ZFC 集合論の超数学での理論と解釈することが可能であるし，巨大基数 κ の存在を仮定して，V_κ（p.77 を参照）の部分集合に関する理論としての定式化も可能である．

ニュー・ファウンデーションに関しても，その研究は，ZFC の中でニュー・ファウンデーションの公理系のモデルを考察する，あるいは集合論の体系との無矛盾等価性を論じるというような議論になることもある（たとえば，[Solovay ∞]）．

このようにみると，既存の数学理論のうち，集合論の中で展開できないものは存在しない，といいきってしまっても問題がないように思われる．

2.1　整列順序

X を集合とするとき，R が X 上の 2 項関係 (binary relation) であるとは，$R \subseteq X^2$ となることである．$x, y \in X$ に対し，xRy で $\langle x, y \rangle \in R$ を表すことにする．xRy は，「x と y が関係 R にある」と読み下すことができる．たとえば，

$$< = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{N}^2 : x \text{ は } y \text{ より小さい}\}$$

とすると[2)]，$<$ は $\mathbb{N}$ 上の 2 項関係となり，ここでの記法による，“$x < y$” は通常の数の大小関係と一致する．「x は y より小さい」が述語なのに対し，$<$ は集合となっていることに注意する．

R と S をそれぞれ X と Y の上の 2 項関係とするとき，$f : X \to Y$ が $\langle X, R \rangle$ から $\langle Y, S \rangle$ への同型写像 (isomorphism) であるとは，f は全単射で[3)]，すべての $x_0, x_1 \in X$ に対し，

$$x_0 R x_1 \;\Leftrightarrow\; f(x_0) S f(x_1)$$

となることである．f が $\langle X, R \rangle$ から $\langle Y, S \rangle$ への同型写像であるとき，これを $f : \langle X, R \rangle \xrightarrow{\cong} \langle Y, S \rangle$ とも表し，このような f が存在するとき，$\langle X, R \rangle$ と $\langle Y, S \rangle$ は同型であるという．$\langle X, R \rangle$ と $\langle Y, S \rangle$ が同型のとき，同型写像を指定せずに，$\langle X, R \rangle \cong \langle Y, S \rangle$ と書くこともある．$\langle X, R \rangle$ と $\langle Y, S \rangle$ が同型のときには，$\langle X, R \rangle$ と $\langle Y, S \rangle$ は同じ構造をもつ互いの「コピー」になっていると考えられる．

X 上の 2 項関係 R が半順序 (partial ordering) であるとは，つぎの (2.1), (2.2) が成り立つことである．

---

2)　$\mathbb{N}$ が p.37 でのように定義されているとき，「x は y より小さい」は，“$x \in y$” によって定義することができる．

3)　$f : X \to Y$ として，すべての異なる $x, x' \in X$ に対し，$f(x), f(x')$ も異なるとき，f は単射 (injection) あるいは 1 対 1 写像 (1-1 mapping) であるといい，すべての $y \in Y$ に対し $f(x) = y$ となる $x \in X$ がとれるとき，全射 (surjection) あるいは上射（上への写像，onto mapping）であるという．f が単射かつ全射のとき，f は全単射 (bijection, 1-1 onto mapping) であるという．

(2.1)　すべての $x \in X$ に対し，xRx でない；

(2.2)　すべての $x, y, z \in X$ に対し，xRy かつ yRz なら xRz.

R は X の 2 元（のうちのいくつか）の比較を与えるものと考えることができる．"xRy" を「y は x より真に大きい」と読み下してみると，(2.1), (2.2) の条件は納得できるであろう．

X 上の半順序 R がさらに

(2.3)　すべての異なる $x, y \in X$ に対し，xRy または yRx のどちらかが成り立つ

を満たすとき，R は X 上の全順序 (total order) であるという．(2.3) により，R が X 上の全順序のときには，X の任意の 2 元は R により比較が可能となる．したがって，X の元は R により「一列に」並べられることになる．そのため全順序を線形順序 (linear ordering) と呼ぶこともある．以下で半順序を考えるときには，「y は x より真に大きい」という解釈を強調するため，文字 R のかわりに "$<$" という記号を使うことにする．$<$ が X 上の半順序であるとき，"$x \leq y$" で「$x < y$ または $x = y$」という関係を表す．これは X 上の 2 項関係としては

$$\leq \, = \, < \cup \{\langle x, x\rangle \in X^2 : x \in X\}$$

を考えていることになる．$<$ が X 上の半順序（または全順序）のとき，X と $<$ の組 $\langle X, <\rangle$ を半順序集合（または全順序集合）と呼ぶ．

X を集合として $<$ を X 上の 2 項関係とする．$\langle X, <\rangle$ が整列順序集合 (well-ordered set) である[4]とは，つぎが成り立つことである．

(2.4)　$\langle X, <\rangle$ は全順序集合である；

(2.5)　すべての空でない X の部分集合 A は $<$ に関する最小元をもつ（これを $\min A$ で表す）．

4)　$<$ は X 上の整列順序 (well-ordering) である，あるいは，$<$ は X を整列する，などともいうことにする．

つぎは容易に示せる．

補題 2.1 $\langle X, <\rangle$ が整列順序集合で，$C \subseteq X$ なら，

$$< \restriction C = < \cap (C \times C) = \{\langle x, y\rangle : x \in C, y \in C \text{ かつ } x < y\}$$

は C 上の整列順序となる．

簡単のために $< \restriction C$, $< \cap (C \times C)$ などと書くかわりに，単に $<$ と書くことが多く，たとえば，「$\langle C, <\rangle$ は整列順序である」，などということにする．後で 2 項関係の一つとして，集合の要素関係 “$\in$” を考えることになる．このときも，たとえば，$\langle X, \in\rangle$ と書いたときには，ここでの $\in$ は $\in \restriction X = \in \cap X^2 = \{\langle x, y\rangle \in X^2 : x \in y\}$ のことである．

$\langle X, <\rangle$ が整列順序集合で $X \neq \emptyset$ なら，$\langle X, <\rangle$ は最小元をもつ．これをみるには，(2.5) で，A として X 自身をとってみればよい．

一方，X は最大元をもつ必要はない — たとえば，$\langle X, <\rangle = \langle \mathbb{N}, <\rangle$ とすると，X が整列集合となることは容易に確かめられるが，X は最大元をもたない．

$x \in X$ が X の最大元でないなら，$y \in X$, $x < y$ で，どんな $z \in X$ に対しても $x < z < y$ とはならないようなものがとれる — このときには，$\{z \in X : x < z\}$ は空でないから，この集合の最小元がとれるが，これが求める性質をもつものとなっている．このような y を x の（X での）つぎの元 (successor) という．x の X でのつぎの元を x' と表す．$x' = \min\{z \in X : x < z\}$ である．

X の元 z は X の最小元でなく，どの $x \in X$ によっても，x' と表せないとき，X の極限点 (limit) と呼ばれる．X のすべての元 x は，X の最小元であるか，極限点であるか，（ただ一つに決まる $z \in X$ の）つぎの元であるか，のどれかである．最後の場合，x は X の非極限点 (successor) である，ということにする．x が X の極限点なら，すべての $z \in X$ に対し，$z < x$ なら $z' < x$ である．$z < x$ なら $z' \leq x$ だが，x はつぎの元でないことから，ここで “$=$” は成り立たないからである．

例 2.2 自然数の全体の集合 $\mathbb{N}$ は自然な順序により整列順序集合となる．$n \in \mathbb{N}$ に対し，$n' = n \cup \{n\}$ である．すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し，$n \neq 0$ なら，$m' = n$ となる $m \in \mathbb{N}$ がとれるから，$\mathbb{N}$ は極限点を含まない．一方 $X = \mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}$ として，X 上の 2 項関係 $<_X$ を，

$$<_X = \{\langle x, y\rangle \in X^2 : (x, y \in \mathbb{N} \text{ かつ } x < y) \\ \text{または } (x \in \mathbb{N} \text{ かつ } y = \mathbb{N})\}$$

と定義すると，$<_X$ は X 上の整列順序となり，$\mathbb{N}$ は X での（$<_X$ に関する）極限点となっている．

例 2.3 実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ を自然な順序で考えると，これは線形順序集合となるが，整列順序集合ではない．たとえば，$\mathbb{R}$ の部分集合 $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x\}$ は最小元をもたない．

$\langle X, <_X\rangle$ と $\langle Y, <_Y\rangle$ を全順序集合とするとき，$f : X \to Y$ が真に増加 (strictly increasing) とは，任意の $x_0, x_1 \in X$ が $x_0 <_X x_1$ を満たすとき，$f(x_0) <_Y f(x_1)$ が成り立つこととする．

補題 2.4 $\langle X, <\rangle$ を整列順序として，$f : X \to X$ を真に増加な関数とする．このとき，すべての $x \in X$ に対し，$x \leq f(x)$ が成り立つ．

証明 $f_0 : X \to X$ が補題の反例となっているとして矛盾を導く．つまり f_0 は真に増加だが，$f_0(x) < x$ となるような $x \in X$ が存在するとする．このとき，$x_0 = \min\{x \in X : f_0(x) < x\}$ がとれるが，$f_0(x_0) < x_0$ だから，x_0 の最小性より，$f_0(x_0) \leq f_0(f_0(x_0))$ となる．一方 f_0 の増加性から，$f_0(x_0) < x_0$ の両辺に f_0 を施すと $f_0(f_0(x_0)) < f_0(x_0)$ となる．したがって，(2.2) により，$f_0(x_0) < f_0(x_0)$ となるが，これは (2.1) に矛盾である． ■

系 2.5 $\langle X, <\rangle$ を整列順序とする．このとき，X 上の恒等写像 id_X[5)] は，$\langle X, <\rangle$ からそれ自身への唯一の同型写像となる．

5) 集合 X に対し，$\mathrm{id}_X = \{\langle x, x\rangle : x \in X\}$ で定義される X から X への関数を X 上の恒等写像 (identity mapping) という．すべての $x \in X$ に対し $\mathrm{id}_X(x) = x$ である．

証明　id_X が $\langle X,<\rangle$ から $\langle X,<\rangle$ への同型写像であることは明らかである．$f:X\to X$ を任意の同型写像とするとき，f も f^{-1} も増加関数となるから，補題 2.4 により，すべての $x\in X$ に対し，$x\le f(x)$ かつ $x=f^{-1}(f(x))\ge f(x)$, したがって $x=f(x)$ が成り立つ．よって $f=\mathrm{id}_X$ である．■

系 2.6　$\langle X,<\rangle$ と $\langle Y,<\rangle$ を整列順序集合とする．もし，$\langle X,<\rangle$ から $\langle Y,<\rangle$ への同型写像が存在すれば，この同型写像は一意に決まる．

証明　$f:X\to Y$ と $g:X\to Y$ を $\langle X,<\rangle$ から $\langle Y,<\rangle$ への同型写像とすれば，$f^{-1}\circ g$ は $\langle X,<\rangle$ から $\langle X,<\rangle$ への同型写像となるから，系 2.5 により，$f^{-1}\circ g=\mathrm{id}_X$ である．したがって，この等式の両辺に f を適用すると $g=f$ が分かる．■

$\langle X,<\rangle$ を半順序集合とする．X の部分集合 I が X の始片 (initial segment) であるとは，

$$(\forall c\in I)(\forall x\in X)(x\le c\ \rightarrow\ x\in I)$$

が成り立つこととする．X の始片 I は X と異なるとき X の真の始片 (proper initial segment) であるという．

$\langle X,<\rangle$ を整列順序集合として，I が X の真の始片のとき，$x=\min(X-I)$ として，x で定義される始片を $X_{<x}=\{y\in X : y<x\}$ と定義すると，$I=X_{<x}$ となる．$y\in X_{<x}$ なら，$y<x$ だから，x の定義から $y\in I$ が分かる．逆に，$c\in I$ なら，$c<x$ である．そうでなければ（$<$ が全順序であることから）$x\le c$ となり，I は始片だから $x\in I$ となってしまい，x の定義に矛盾である．したがって，$c\in X_{<x}$ である．

系 2.7　$\langle X,<\rangle$ が整列順序集合なら，$\langle X,<\rangle$ は，$\langle X,<\rangle$ のどの真の始片とも同型にならない．

定理 2.9 の証明のために，まず，つぎの補題を用意しておく．証明は p.38 で述べた関数の定義 (1.2) から明らかである．

補題 2.8 $\mathcal{F}$ を関数を要素とする集合とする．$F = \bigcup \mathcal{F} \, (= \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f)$ が関数となるのは，$\mathcal{F}$ に含まれる関数が互いに矛盾しないときである[6)]．また，このときには，$\mathrm{dom}(F) = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} \mathrm{dom}(f)$ となる．

定理 2.9 $\langle X, < \rangle$ と $\langle Y, < \rangle$ を整列順序集合とするとき，つぎの三つのうち（ちょうど）一つが成り立つ．

(1) $\langle X, < \rangle$ と $\langle Y, < \rangle$ は同型である．

(2) $\langle X, < \rangle$ は $\langle Y, < \rangle$ の真の始片の一つと同型である．

(3) $\langle Y, < \rangle$ は $\langle X, < \rangle$ の真の始片の一つと同型である．

証明 定理が成り立たないとすると，整列順序集合 $\langle X, < \rangle$, $\langle Y, < \rangle$ で，(1), (2), (3) のいずれも成り立たないようなものが存在する．

$$\mathcal{F} = \{ f : X \text{ のある始片 } X' \text{ と } Y \text{ のある始片 } Y' \text{ に対し } f : \langle X', < \rangle \overset{\cong}{\to} \langle Y', < \rangle \}$$

とする[7)]．このとき，

クレイム 2.9.1 $f, g \in \mathcal{F}$ なら，$f \subseteq g$ か $g \subseteq f$ のいずれかが成り立つ．

$\vdash$ $f, g \in \mathcal{F}$ なら，$\mathrm{dom}(f), \mathrm{dom}(g)$ はともに X の始片だから，$\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$ か $\mathrm{dom}(g) \subseteq \mathrm{dom}(f)$ のいずれかが成り立つ．仮に $\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$ とすると，補題 2.1 と系 2.6 により，$f = g \restriction \mathrm{dom}(f)$ となるから，$f \subseteq g$ である[8)]．同様に $\mathrm{dom}(g) \subseteq \mathrm{dom}(f)$ とすると，$g \subseteq f$ が成り立つ． $\dashv$

クレイム 2.9.1 と補題 2.8 により，$f^* = \bigcup \mathcal{F}$ は $\mathrm{dom}(f^*) = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} \mathrm{dom}(f)$ 上の関数となるが，

クレイム 2.9.2 f^* は $\mathcal{F}$ の最大元となる．

---

6) $\mathcal{F}$ に含まれる関数が互いに矛盾しない (compatible)，とは，すべての $f, g \in \mathcal{F}$ に対し，$f \cap g$ が（$\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$ 上の）関数となるとき（つまり，すべての $x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$ に対し，$f(x) = g(x)$ となるとき）である．

7) $\mathcal{F}$ が集合であることは $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X \times Y)$ と分出公理により示せる．

8) $f \restriction S$ で関数 f の S への制限を表す．$f : X \to Y$ のとき，$f \restriction S = f \cap (S \times Y)$ である．

$\vdash$ $\mathrm{dom}(f^*) = \bigcup\{\mathrm{dom}(f) : f \in \mathcal{F}\}$, $f^*``\mathrm{dom}(f^*) = \bigcup\{f``\mathrm{dom}(f) : f \in \mathcal{F}\}$ だから，f^* は X の始片から Y の始片への写像となっている．$X^* = \mathrm{dom}(f^*)$, $Y^* = f^*``\mathrm{dom}(f^*)$ とおく．

f^* が順序を保存することをみるために $x, y \in X^*$, $x < y$ をとる．このとき $f, g \in \mathcal{F}$ で，$x \in \mathrm{dom}(f)$, $y \in \mathrm{dom}(g)$ となるものがあるが，クレイム 2.9.1 により，たとえば，$g \subseteq f$ としてよい．したがって $x, y \in \mathrm{dom}(f)$ としてよいが，$f \in \mathcal{F}$ により，$x < y$ から $f^*(x) = f(x) < f(y) = f^*(y)$ となる．$f^*(x) < f^*(y)$ なら $x < y$ となることも同様に示せる．

したがって $f^* \in \mathcal{F}$ だが，f^* の定義から，すべての $f \in \mathcal{F}$ に対し，$f \subseteq f^*$ となるから，f^* は $\mathcal{F}$ の最大元である． $\dashv$

仮定により，$X^* \neq X$, $Y^* \neq Y$ だから，$x^* = \min(X - X^*)$, $y^* = \min(Y - Y^*)$ がとれるが，

$$f^{**} = f^* \cup \{\langle x^*, y^* \rangle\}$$

とすれば，明らかに $f^{**} \in \mathcal{F}$ となる．ところが，$f^* \subsetneq f^{**}$ だから，これは f^* が $\mathcal{F}$ の最大元であることに矛盾である． ■

2.2 数学的帰納法による証明と関数の再帰的定義

整列順序集合上では，命題を帰納的に証明したり，関数を再帰的に定義したりすることができる．

定理 2.10（帰納法 (induction)） $\langle X, < \rangle$ を整列順序集合として，$E(x)$ を X の元 x に関する命題とする．すべての $x \in X$ に対し，条件

(2.6) すべての $y < x$ に対し命題 $E(y)$ が成り立つなら，x に対しても命題 $E(x)$ が成り立つ

が成り立つなら，すべての $x \in X$ に対し，命題 E が成り立つ．

証明　定理が成り立たないと仮定して，矛盾を導く．この仮定により，整列順序集合 $\langle X, < \rangle$ と X の元 x に関する命題 $E(x)$ で，E は (2.6) を満たすが，$E(x)$ とならないような $x \in X$ が存在するようなものがとれる．したがって，

$$Y = \{x \in X : E(x) \text{ は成り立たない}\}$$

とすると Y は空でない．よって，X が整列順序集合であることから，Y の最小元 x_0 がとれる．x_0 の最小性から，すべての $y \in X, y < x_0$ に対し，$E(y)$ が成り立つ．したがって (2.6) により，$E(x_0)$ も成り立つことが帰結できてしまうが，これは，$x_0 \in Y$ に矛盾である．■

整列順序 $<$ 上の帰納法は，つぎのようなやり方で行われることも多い[9]．

定理 2.11　$\langle X, < \rangle$ を整列順序集合として，$E(x)$ を X の元 x に関する命題とする．つぎの (2.7), (2.8), (2.9) が成り立つとする．

(2.7)　X の最小元は E を満たす；

(2.8)　$x \in X$ が E を満たし，X の最大元でないなら，x' も E を満たす；

(2.9)　x が極限点で，すべての $y < x$ が $E(y)$ を満たすなら，x も $E(x)$ を満たす．

このとき，すべての $x \in X$ は E を満たす．

証明　E が 定理 2.10 での (2.6) を満たすことを示せばよい．このため，$x \in X$ を任意にとり，$E(y)$ がすべての $y < x$ に対し成り立つとして，$E(x)$ を示す．

x が X の最小元のときには，(2.7) により $E(x)$ となるから，(2.6) は成り立つ．x が最小元でないときには，x は（ある X の元の）つぎの元であるか，極限点であるかのどちらかであるが，x がつぎの元のときには，(2.8) により，x が極限点であるときには，(2.9) により，$E(x)$ が成り立つ．

したがって，(2.6) が成り立つことが分かるが，このことと定理 2.10 により，すべての $x \in X$ に対し $E(x)$ が成り立つことが帰結できる．■

---

9)　ここでは，p.59 でのように，$x \in X$ が X の最大元でないとき，x' で x の X でのつぎの元を表している．

定理 2.12（関数の再帰的定義 (recursion)）　$\langle X, < \rangle$ を整列順序集合として，Y をある集合とする．G を，

$$\mathrm{dom}(G) = \{ f : f \text{ は，ある } X \text{ の真の始片から } Y \text{ への関数} \}$$

となるような関数とする[10]．このとき，$F : X \to Y$ で，すべての $x \in X$ に対し，

$$(2.10)\quad F(x) = G(F \restriction X_{<x})$$

となるようなものが，ちょうど一つ存在する[11]．

証明　まず，(2.10) を満たすような F がたかだか一つしか存在しないことを示す．X 上の関数 F と F' が，ともに (2.10) を満たしていると仮定する．$F \neq F'$ だったとすると，$\{x \in X : F(x) \neq F'(x)\}$ は空でないから，この集合の最小元 x_0 がとれるが，$y < x_0$ なら x_0 の最小性から，$F(y) = F'(y)$ となる．したがって，$F \restriction X_{<x_0} = F' \restriction X_{<x_0}$ となるが，このことから，

$$F(x_0) = G(F \restriction X_{<x_0}) = G(F' \restriction X_{<x_0}) = F'(x_0)$$

となってしまい x_0 のとり方に矛盾する．したがって $F = F'$ である．

つぎに，(2.10) を満たすような F が実際に存在することを示す．

$$\mathcal{F} = \{ f : f \text{ は } X \text{ のある始片 } I \text{ 上の関数で すべての } x \in I \text{ に対し，} f(x) = G(f \restriction X_{<x}) \text{ が成り立つ} \}$$

とする．$\emptyset \in \mathcal{F}$ だから[12]，$\mathcal{F} \neq \emptyset$ である．

以下で，この $\mathcal{F}$ に補題 2.8 を適用して，$F = \bigcup \mathcal{F}$ が求めるようなものであることを示す．

---

10)　直観的には，G は，F が X のある始片まで定義できたときに，これを一つ先の元にどう延長するかを指定する関数である．(2.10) は，F がこの延長を「くり返す」ことで得られる関数となっていることを主張している．

11)　定理 2.12 は，G が関数でなく，定義可能な対応（つまり，後述の脚注 19 の意味でのクラス関数）である場合にも成り立つが，このことの証明には，分出公理だけでは不十分で，置換公理が必要となる．

12)　関数の定義から，$\emptyset : \emptyset \to \emptyset$ だが，$\emptyset$ は $\emptyset$ 上の唯一の関数で，x_0 を X の最小元とするとき，$X_{<x_0} = \emptyset$ であることに注意すると，$\emptyset \in \mathcal{F}$ が分かる．

クレイム 2.12.1　$f, g \in \mathcal{F}$ なら f と g は矛盾しない．

$\vdash$　$\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$ と仮定してよいが，$g \restriction \mathrm{dom}(f) \in \mathcal{F}$ だから，前半に証明した一意性を $\mathrm{dom}(f)$ 上の関数に適用して $f = g \restriction \mathrm{dom}(f)$ が得られる．したがって $f \subseteq g$ である．　$\dashv$

クレイム 2.12.2　$F = \bigcup \mathcal{F}$ は X 上の関数で，$F \in \mathcal{F}$ となる．とくに F は (2.10) を満たす．

$\vdash$　$F = \bigcup \mathcal{F}$ とすると，クレイム 2.12.1 と補題 2.8 により，F は X の始片 $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} \mathrm{dom}(f)$ 上の関数となる[13]．すべての $f \in \mathcal{F}$ は (2.10) を満たすから，F も (2.10) を満たす．したがって $F \in \mathcal{F}$ である．

もし $\mathrm{dom}(F) = X$ でなかったとすると

$$\{x \in X : \text{すべての } f \in \mathcal{F} \text{ に対し } x \notin \mathrm{dom}(f)\} \neq \emptyset$$

となるから，この集合の最小元 x_0 がとれる．x_0 の最小性から，$\mathrm{dom}(F) = X_{<x_0}$ となることが分かる．ここで，

$$F^* = F \cup \{\langle x_0, G(F) \rangle\}$$

とすると，$F^* \in \mathcal{F}$ となるが，$F \subsetneqq F^*$ だから，これは F の定義に矛盾である．　$\dashv$

■

定理 2.11 と同じように，上の定理に対しても，X 上の F が場合分けをともなった再帰によって定義されているような形のヴァージョンが考えられる．

定理 2.13　$\langle X, < \rangle$ を整列順序集合として，Y を集合とする．$H : Y \to Y$ とし，K を $\{f : f$ は，ある X の真の始片から Y への関数$\}$ から Y への写像として，$a \in Y$ とする．このとき，関数 $F : X \to Y$ で，

13)　ここに，$\bigcup_{f \in \mathcal{F}} \mathrm{dom}(f)$ は $\bigcup\{\mathrm{dom}(f) : f \in \mathcal{F}\}$ のことである．この集合は，分出公理からその存在を保証される $\{\mathrm{dom}(f) : f \in \mathcal{F}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ に和集合の公理を適用して得られるものとなっている．脚注 11 は，G がクラスの場合には，上の “$\subseteq \mathcal{P}(X)$” によるトリックが使えなくなるため，置換公理を使って $\bigcup\{\mathrm{dom}(f) : f \in \mathcal{F}\}$ の存在を保証する必要が出てくることを指摘している．

$$(2.11)\quad F(x)=\begin{cases} a & (x\text{ が }X\text{ の最小元のとき}) \\ H(F(z)) & (x\text{ が }X\text{ の非極限点で }x=z'\text{ のとき}) \\ K(F\restriction X_{<x}) & (x\text{ が }X\text{ の極限点のとき}) \end{cases}$$

となるものがただ一つ存在する．

集合 x が推移的とは，すべての $y\in x$ と $z\in y$ に対し $z\in x$ が成り立つことだった．

例 2.14 $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ は推移的である．$\{\{\emptyset\}\}$ は推移的でない．$\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\}\}$ は推移的である．

補題 2.15 (1) t が推移的なら $t\cup\{t\}$ も推移的である．

(2) 集合 $\mathcal{F}$ の元がすべて推移的なら，$\bigcup\mathcal{F}$ も推移的である．

証明 (1)：$x\in y\in t\cup\{t\}$ とする．$y\in t$ なら，t は推移的だから，$x\in t$ である．また $y\in\{t\}$ なら $y=t$ となるから，このときも $x\in t$ となる．したがって，いずれの場合にも $x\in t\subseteq t\cup\{t\}$ である．

(2)：$x\in y\in\bigcup\mathcal{F}$ なら，$u\in\mathcal{F}$ で $y\in u$ となるものがあるが，仮定から u は推移的だから，$x\in u$ となる．したがって，$x\in\bigcup\mathcal{F}$ である． ■

補題 2.16 T を推移的として，$\in$ は T 上の全順序となっているとする．このとき，つぎが成り立つ．

(1) すべての $x\in T$ は推移的となる．

(2) $x, y\in T, x\in y$ で，y は（$\in$ の意味で）x のつぎの元になっているとする．このとき，$y=x\cup\{x\}$ である．

(3) $U\subseteq T$ で，U は推移的で，最大元をもたないとする．$x\in T$ が U の（$\in$ の意味での）最小の上界になっているとき，$U=x$ である．

証明 (1)：$z\in y\in x$ なら，T が推移的により $y\in T, z\in T$ である．したがって，$\in$ が T 上の全順序であることから，$z\in x$ が結論できる．

(2)：$x\in y$ と (1) により，$x\subseteq y$ である．したがって，$x\cup\{x\}\subseteq y$ だが，もし $x\cup\{x\}\neq y$ だったとすると，ある $z\in y-(x\cup\{x\})$ がとれる．とく

に $z \neq x$ である．T は推移的だから，$z \in T$ となるが，$z \notin x \cup \{x\}$ だから，$\in$ が T 上で全順序となっていることから，$x \in z$ となる．したがって，$x \in z \in y$ となるが，$\in$ は T 上全順序であることから，$z \neq y$ である．これは y が x のつぎの元であることに矛盾する．

(3)：x は U の上界だが U の最大元ではないから，$U \subseteq x$ となる．したがって，$U \neq x$ とすれば，$z \in x - U$ がとれるが，すべての $u \in U$ に対し，$u \in z$ となる．もしそうでないなら，$\in$ が T 上全順序であることから，$u = z$ または，$z \in u$ となるが，U が推移的であることから，いずれの場合にも $z \in U$ となり z のとり方に矛盾である．したがって z は U の上界となるが，$z \in x$ だから，これは x が U の最小上界であることに矛盾である． ■

定理 2.17 (モストウスキの同型定理 (Mostowski's isomorphism theorem))
$\langle X, < \rangle$ を，整列順序集合とする．このとき，推移的な集合 T と同型写像

$$\pi : \langle X, < \rangle \overset{\cong}{\to} \langle T, \in \rangle$$

がとれる．とくに $\in$ は T 上の整列順序となっている．さらに，ここでの π と T は一意に決まる．

T は $\langle X, < \rangle$ のモストウスキ像 (Mostowski collapse) と呼ばれ，π はモストウスキ同型写像 (Mostowski isomorphism) と呼ばれる．

証明 (ステップ I)：まず，このような T と π が存在するとすればその存在は一意であることを示す．そうでなかったとして，$\pi : \langle X, < \rangle \overset{\cong}{\to} \langle T, \in \rangle$ と $\pi' : \langle X, < \rangle \overset{\cong}{\to} \langle T', \in \rangle$ を異なる同型写像とする．このとき，

$$\{x \in X \;:\; \pi(x) \neq \pi'(x)\}$$

は空でないから，最小元 x_0 をもつ．

もし，x_0 が，ある $y \in X$ のつぎの元なら，x_0 の最小性から，$\pi(y) = \pi'(y)$ となる．π は同型写像だから，$\pi(x_0)$ は $\pi(y)$ の T でのつぎの元となる．したがって，補題 2.16 (2) により，$\pi(x_0) = \pi(y) \cup \{\pi(y)\}$ となることが分か

る．同様に，$\pi'(x_0)=\pi'(y)\cup\{\pi'(y)\}$ となる．したがって，$\pi(x_0)=\pi'(x_0)$ となってしまい矛盾である．

もし x_0 が極限点なら，x_0 の最小性から，$\pi\restriction X_{<x_0}=\pi'\restriction X_{<x_0}$ となるが，x_0 は $X_{<x_0}$ の最小上界で，π が同型写像であることから，$\pi(x_0)$ も，$\pi``X_{<x_0}$ の最小上界である．また，$X_{<x_0}$ は $X$ の始片だから，$\pi``X_{<x_0}$ も T の（$\in$ に関する）始片となり，したがって推移的である．よって，補題 2.16 (3) により $\pi``X_{<x_0}=\pi(x_0)$ である．同様に，$\pi'``X_{<x_0}=\pi'(x_0)$ となるから，$\pi(x_0)=\pi'(x_0)$ となり矛盾である．

(ステップ II)：つぎに，命題

(2.12)　すべての $x\in X$ に対し，推移的な T_x と，写像 π_x で

$$\pi_x:\langle X_{<x},<\rangle\xrightarrow{\cong}\langle T_x,\in\rangle$$

となるものが存在する．さらに，ここでの π_x と T_x は一意に決まる

を $x\in X$ に関する帰納法で示す．一意性は（ステップ I）でと同様に証明できるので，命題の前半の帰納法による証明を与える．

(IIa)：$x\in X$ が X の最小元であるときには，$X_{<x}=\emptyset$ だから $T_x=\emptyset$, $\pi=\emptyset$ とすればよい．

(IIb)：ある $x\in X$ に対し，推移的な T_x と，π_x で $\pi_x:\langle X_{<x},<\rangle\xrightarrow{\cong}\langle T_x,\in\rangle$ となるようなものがとれない，とすると，このような x のうちで最小のものがとれる．これを x_0 とすると，x_0 の最小性から，すべての $x<x_0$（つまり $x\in X_{<x_0}$）に対し，推移的な T_x と，写像 π_x で $\pi_x:\langle X_{<x},<\rangle\xrightarrow{\cong}\langle T_x,\in\rangle$ となるものがとれる．(IIa) により，x_0 は X の最小元ではないから，$X_{<x_0}\neq\emptyset$ である．

(IIb1)：x_0 がある $x^*\in T$ のつぎの元だとすると，$\pi_{x_0}=\pi_{x^*}\cup\{\langle x^*,T_{x^*}\rangle\}$ とすれば，

$$\pi_{x_0}:\langle X_{<x_0}\rangle\xrightarrow{\cong}\langle T_{x^*}\cup\{T_{x^*}\},\in\rangle$$

となるが，補題 2.15 (1) により $T_{x^*}\cup\{T_{x^*}\}$ は推移的だから，これは x_0 のとり方に矛盾である．

(IIb2)：x_0 が極限点だとすると，（ステップ I）を各 $x < x_0$ に対する T_x, π_x に適用すると，$x < y < x_0$ なら，$\pi_y \restriction X_{<x}$ が $\langle X_{<x}, <\rangle$ から，$\langle \pi_y “X_{<x}, \in\rangle$ への同型写像となっていることから，$\pi_x \subseteq \pi_y$, $T_x = \{z \in T_y : z \in \pi_y(x)\}$ となることが分かる．したがって，$\pi_{x_0} = \bigcup\{\pi_x : x < x_0\}$ とすると，

$$\pi_{x_0} : \langle X_{<x_0}, <\rangle \xrightarrow{\cong} \bigcup\{T_x : x < x_0\}$$

となるが，補題 2.15 (2) により，$\bigcup\{T_x : x < x_0\}$ は推移的だから，これは，x_0 のとり方に矛盾である．

（ステップ III）：(2.12) により，すべての $x \in X$ に対し，推移的な T_x と，写像 π_x で $\pi_x : \langle X_{<x}, <\rangle \xrightarrow{\cong} \langle T_x, \in\rangle$ となるものが存在して，一意性より，x, $y \in X$, $x < y$ なら，$\pi_x \subseteq \pi_y$, $T_x = \{z \in T_y : z \in \pi_y(x)\}$ となることが分かる．したがって，$\langle X, <\rangle$ が最大元 x^* をもつ場合には，$\pi = \pi_{x^*} \cup \{\langle x^*, T_{x^*}\rangle\}$, $T = T_{x^*} \cup \{T_{x^*}\}$ とすれば，(IIb1) と同様に，これらの π, T が求めているようなものであることが示せる．$\langle X, <\rangle$ が最大元をもたない場合には，$\pi = \bigcup_{x\in X} \pi_x$, $T = \bigcup_{x \in X} T_x$ とすると，(IIb2) でと同様に議論して，これらの π, T が求めているようなものであることが示せる． ■

上の証明をくわしく調べてみると，いくつかの箇所で置換公理が本質的に使われていることが分かる．実際，定理 3.13 の後でみるように，上の定理 2.17 は，ZF から置換公理を除いた体系では証明できないことが示せる．

補題 2.18　$\langle X, <\rangle$ を整列順序集合として，Y を X の始片とする（したがって $\langle Y, <\rangle$ も整列順序集合である）．$\pi_X : \langle X, <\rangle \to \langle T, \in\rangle$ と $\pi_Y : \langle Y, <\rangle \to (S, \in)$ をこれらに属するモストウスキ同型写像とする．このとき $\pi_Y = \pi_X \restriction Y$ となり，したがって $S \subseteq T$ で，S は T の $\in$ に関する始片となる．

証明　$\pi_X \restriction Y : \langle Y, <\rangle \xrightarrow{\cong} (\pi “Y, \in)$ はモストウスキ同型写像となる．したがって，定理 2.17 でのモストウスキ同型写像の一意性から $\pi_Y = \pi_X \restriction Y$ である．よって，$S \subseteq T$ で π_X は同型写像だから，S は T の $\in$ に関する始片となることが分かる． ■

2.3　順序数

順序数 (ordinal numbers) のクラス On (ordinals) を導入する．つぎの性質を On がもつことがポイントとなる．

(2.13)　On は真のクラスで，推移的で[14]，$\in$ に関し整列順序となっている[15]；

(2.14)　任意の整列順序集合 $\langle X, < \rangle$ は，一意に決まる順序数 $\langle \alpha, \in \rangle$ と順序同型となる．

この性質により，順序数の全体のクラスは，すべての整列順序集合のクラスの（順序同型に関する同値類の）自然な代表元を集めたクラスになる．

この節での議論は，とくに別に指定しないかぎり，基礎の公理を用いないものとなっているが，順序数の理論を基礎の公理を用いずに導入しておくことで，基礎の公理の累積的階層による特徴付け（系 2.26）や，基礎の公理のそれ以外の ZF の公理上の無矛盾性の証明（定理 3.10）が可能となる．

推移的な集合 α が $\in$ により整列されているとき，α は順序数であるという．

$$\mathrm{On} = \{\alpha : \alpha \text{ は順序数}\}$$

として[16]，

(2.15)　$\alpha, \beta \in \mathrm{On}$ に対し，$\alpha < \beta \iff \alpha \in \beta$

として On 上の関係 $<$ を定義する．以下の補題 2.20 で示されるように，$<$ は On 上の全順序となる．

補題 2.19　α が順序数となるのは，$\langle \alpha, \in \rangle$ が，ある整列順序集合のモストウスキ像となる，ちょうどそのときである．

14)　つまり，$\alpha \in \mathrm{On}$ で $\beta \in \alpha$ なら $\beta \in \mathrm{On}$ が成り立つ．

15)　つまり，$\in$ は On 上線形順序となり，On のどの部分クラスも，$\in$ に関する最小元をもつ．

16)　On のかわりに Ord という記号を使うこともある．

証明　モストウスキ像の定義から，$\langle \alpha, \in \rangle$ が，ある整列順序集合のモストウスキ像となるなら，α が順序数となることは明らかである．逆に α が順序数なら，$\langle \alpha, \in \rangle$ は整列順序集合で，$\langle \alpha, \in \rangle$ は自分自身のモストウスキ像となる．
■

任意の整列順序集合 $\langle X, <_X \rangle$ に対し，$\langle X, <_X \rangle \cong \langle \alpha, \in \rangle$ となる $\alpha \in \mathrm{On}$ はモストウスキの定理により一意に決まるが，このような α を $\langle X, <_X \rangle$ の順序型 (order type) と呼び，$otp(\langle X, <_X \rangle)$ で表す．ただし，X 上の順序 $<_X$ が何かが文脈から明らかなときには，簡単のために $otp(X)$ と書くことにする．

補題 2.20　On に関してつぎが成り立つ．

(1)　$\beta \in \alpha \in \mathrm{On}$ なら，$\beta \in \mathrm{On}$ である．したがって，On は推移的なクラスである．

(2)　$\alpha \in \mathrm{On}$ なら，$\alpha = \{\beta \in \mathrm{On} : \beta < \alpha\}$ となる．

(3)　$\alpha, \beta \in \mathrm{On}$ に対し，$\alpha = \beta$ または，$\alpha \subsetneqq \beta$ または $\beta \subsetneqq \alpha$ のいずれかが成り立つ．

(4)　$\alpha \in \mathrm{On}$ なら，$\alpha \notin \alpha$ である．

(5)　$\alpha, \beta \in \mathrm{On}$ に対し，$\beta < \alpha \Leftrightarrow \beta \subsetneqq \alpha$ が成り立つ．

(6)　M を順序数からなる集合とするとき，$\bigcup M \in \mathrm{On}$ となり，さらに（上の (2.15) で定義した $<$ に関し）$\bigcup M = \sup M$ である．

(7)　$X \subseteq \mathrm{On}$ が On で共終[17]であるなら X は真のクラスである．とくに，On は真のクラスである．

証明　(1)：$\beta \in \alpha \in \mathrm{On}$ なら，β は推移的で，$\in$ により整列されていることを示せばよい．$\delta \in \gamma \in \beta$ とすると，α が推移的であることから，$\gamma \in \alpha$ で $\delta \in \alpha$ である．したがって，$\in$ が α 上の整列順序であることから，$\delta \in \beta$ となる．よって β は推移的である．α が推移的により $\beta \subseteq \alpha$ となり，$\in$ は α 上整列順序だから，補題 2.1 により，$\in$ は β 上でも整列順序になっていることが分かる．

17)　$\langle Y, < \rangle$ を半順序集合（またはクラス）とするとき，$Y' \subseteq Y$ が Y で共終とは，すべての $y \in Y$ に対し，$y' \in Y'$ で $y \leq y'$ となるものが存在することである．

(2)：$\alpha=\{x : x\in\alpha\}$ だから，(1) により成り立つ．

(3)：定理 2.9 により，α と β は同型であるか，α は β の真の始片と同型であるか，β は α の真の始片と同型であるかのいずれかが成り立つ．ここで α と β が同型なら，α と β は両方とも α のモストウスキ像になるから，モストウスキ同型写像の一意性から $\alpha=\beta$ である．

もし α が β の真の始片 γ と同型なら，α と γ はともに α のモストウスキ像となるから，$\alpha=\gamma$ である．したがって $\alpha\subsetneqq\beta$ が成り立つ．

同様にして，β が α の真の始片と同型なら，$\beta\subsetneqq\alpha$ となることが分かる．

(4)：もし $\alpha\in\alpha$ だったとすると，α の元 x で $x\in x$ となるものが存在することになるが（α 自身がそのようなものになっている），これは $\in$ が α 上の全順序になっていることに矛盾する．

(5)：$\beta<\alpha$ つまり，$\beta\in\alpha$ なら，α の推移性から，$\beta\subseteq\alpha$ となる．(4) により，$\beta\in\alpha-\beta$ だから，$\beta\subsetneqq\alpha$ である．

逆に，$\beta\subsetneqq\alpha$ だったとする．ξ を，$\alpha-\beta$ の $\in$ に関する最小元とする．$\eta\in\xi$ なら $\eta\in\alpha$ だから，ξ の最小性から $\eta\in\beta$ である．したがって，$\xi\subseteq\beta$ である．もし $\xi\neq\beta$ なら，$\in$ は α 上整列順序だから，$\xi\in\beta$ または $\beta\in\xi$ のどちらかが成り立たなくてはならない．$\beta\in\xi$ なら，前のパラグラフにより，$\beta\subsetneqq\xi$ となるが，これは $\xi\subseteq\beta$ に矛盾である．一方 $\xi\in\beta$ とすると，これは ξ の選び方に矛盾である．したがって，$\beta=\xi<\alpha$ である．

(6)：M を順序数からなる集合とするとき，$\bigcup M$ が推移的で $\in$ により整列されることは補題 2.15 (2) と本補題の (5) から示せる．したがって，$\bigcup M\in\mathrm{On}$ である．$\beta\in M$ なら，$\beta\subseteq\bigcup M$ だから，(5) により，$\bigcup M$ は，M の（$<$ に関する）上界になっている．これが M の最小上界となることも (5) により明らかである．

(7)：$X\subseteq\mathrm{On}$ が On で共終とすると，(2) により，$\mathrm{On}=\bigcup X$ である．したがって，X が集合だったとすると，(6) により $\mathrm{On}\in\mathrm{On}$ となってしまうが，これは (4) に矛盾である．■

補題 2.21　つぎが成り立つ．

(1)　On 上の関係 $\in$（つまり (2.15) で定義した On 上の関係 $<$）は，On

上の全順序となる．

(2) $<$ は On 上の整列順序である．よりくわしくいうと，任意の空でないクラス $C \subseteq \mathrm{On}$ に対し，$\bigcap C \in \mathrm{On}$ となり，$\bigcap C = \min C$ が成り立つ．

(3) $0 = \emptyset$ は順序数で，$<$ に関して On の最小元となる．

(4) $\alpha \in \mathrm{On}$ なら，$\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\} \in \mathrm{On}$ となり，$\alpha + 1$ は，$\langle \mathrm{On}, < \rangle$ での α のつぎの元である．

証明 (1)：補題 2.20 (3), (5) によりよい．

(2)：$\delta \in \mathrm{On}$ を $C \cap \delta \neq \emptyset$ となるようにとると，δ が順序数であることから，$\min(C \cap \delta)$ が存在する．明らかに $\min(C \cap \delta) = \min(C)$ だが，補題 2.20 (5) により，$\min(C \cap \delta) = \bigcap(C \cap \delta) = \bigcap C$ である．

(3)：$\emptyset$ が順序数であることはよい（順序数の定義は $\emptyset$ に対して自明に (vacantly) 成り立つ）．補題 2.20 (5) により，$\emptyset$ は（$<$ に関する）On の最小元である．

(4)：$\alpha + 1$ は補題 2.15 (1) により推移的である．これが $\in$ によって整列されることも容易に確かめられるから，$\alpha + 1 \in \mathrm{On}$ が分かる．補題 2.20 (5) により，$\alpha + 1$ は α のつぎの元である． ■

補題 2.21 により，$0 = \emptyset$, $1 = 0 + 1$, $2 = 1 + 1$, $\ldots$ が On の元となる．$n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ である[18]．

$\alpha \in \mathrm{On}$ は，$\alpha \neq \emptyset$ で最大元をもたないとき，極限順序数 (limit ordinal) であるという．$\alpha, \beta \in \mathrm{On}$ で，$\beta < \alpha$ のとき，β が極限順序数であることと，β が $\langle \alpha, < \rangle$ の極限点であることは同値である．順序数 α が極限順序数でないとき，後続順序数 (successor ordinal) であるという．

極限順序数の概念を使って自然数の全体の集合 $\mathbb{N}$ を定義することができる．$n \in \mathrm{On}$ が自然数であるとは，n は 0 または後続順序数で n のすべての要素も後続順序数であること，とできるからである．

補題 2.22 つぎが成り立つ．

(1) 自然数の要素は自然数である．

---

18) ここでの $n-1$ は数表記としての $n-1$ である！

(2) 集合 X を $\emptyset \in X$ ですべての $y \in X$ に対し $y \cup \{y\} \in X$ となるようなものとすると，X はすべての自然数を含む．

補題 2.22 (2) でのような X は無限公理により存在するから，分出公理により，

$$\mathbb{N} = \{n \in \mathrm{On} : n \text{ は自然数}\}$$

は集合になる．また，補題 2.22 (2) により，p.37 で導入した $0, 1, 2, \ldots$ は $\mathbb{N}$ の最初の方の要素になっていることが分かる．自然数の定義から $\mathbb{N} \subseteq \mathrm{On}$ で補題 2.22 (1) により，$\bigcup \mathbb{N} = \mathbb{N}$ となるから，補題 2.20 (6) により，$\mathbb{N} \in \mathrm{On}$ となる．集合論では，$\mathbb{N}$ が順序数であることを強調するときには，$\mathbb{N}$ の代わりに ω という記号を用いることが多い．

補題 2.22 の証明は，以下に述べる On 上の帰納法の説明の後まで保留する．

補題 2.20 (7) でみたように，On は真のクラスであるが，On 上でも定理 2.10 や，定理 2.12 でのような帰納法による証明や，関数[19]の帰納的定義が可能である[20]．

定理 2.23 (1) $\varphi(x)$ を（パラメタをもつ）$\mathcal{L}_\in$ の論理式として，

$$(2.16) \quad (\forall \alpha \in \mathrm{On})(\forall \beta < \alpha)(\varphi(\beta) \ \rightarrow \ \varphi(\alpha))$$

が成り立つなら，$(\forall \alpha \in \mathrm{On})\varphi(\alpha)$ が成り立つ．

(2) クラス D を，

---

19) 定義域がクラスであるような関数は，英語では “functional” と呼ばれることもある．たとえば，クラス X が $X = \{x : \varphi(x)\}$ として導入されているときには，X 上の関数とは，$\forall x\ (\varphi(x) \rightarrow \exists! y\ (\psi(x, y)))$ が ZFC（ないし，そこで問題となっている ZFC の部分あるいは拡張）から証明できるような，$\mathcal{L}_\in$ の論理式 $\psi(x, y)$ のこと，あるいは，これに対応するクラス $\{\langle x, y\rangle : \varphi(x) \ \wedge \ \psi(x, y)\}$ のこと，とする．ただし，$\varphi(x)$ も $\psi(x, y)$ も，x と y 以外の自由変数をパラメタとして含んでいることもありえる．また，“$\exists! x$” という記法については，p.47 の脚注 21 を参照されたい．本稿では定義域が真のクラスとなっていて，したがって自分自身も真のクラスとなっているような関数のことをクラス関数 (class function) と呼ぶことにする．

20) 帰納的関数論の用語では，これは「関数の再帰的定義」と言うべきであろう．しかし，集合論では，このような文脈でも「帰納的定義」という言いかたをすることが多い．（クラス）関数の存在定理としては以下の (2.17) のような再帰的な規定となっていても，実際の運用では，たとえば以下での $V(\alpha)$, $\alpha \in \mathrm{On}$ の導入 (2.21)–(2.23) でのような超限帰納法による帰納的構成の形をとることが多い，ということが，その背景である．

$$D = \{ f : f \text{ は，ある } \alpha \in \mathrm{On} \text{ に対し } \mathrm{dom}(f) = \alpha \text{ となる関数} \}$$

と定義して，G を D 上の関数[21]とするとき，On 上の関数 F で，すべての $\alpha \in \mathrm{On}$ に対し，

(2.17)　$F(\alpha) = G(F \restriction \alpha)$ となるようなものが一意に存在する[22]．

証明　(1)：そうでないとすると，$\alpha \in \mathrm{On}$ で，$\varphi(\alpha)$ とならないようなものが存在する．したがって，補題 2.21 (2) により，そのようなもののうちで最小なもの α_0 が存在する．α_0 の最小性から，$\forall \beta < \alpha_0 \varphi(\beta)$ となるから，(2.16) により，$\varphi(\alpha_0)$ が成り立つが，これは，α_0 のとり方に矛盾である．

(2)：一意性は定理 2.17 と同様に示せるから，F の存在を示せばよい．

まず，置換公理を用いれば，定理 2.12 をつぎの形に変更しても，定理 2.12 とまったく同じ証明で示せることを確認しておく（脚注 13 を参照）．

定理 2.12′　$\langle X, < \rangle$ を整列順序集合として，クラス G を，

$$\mathrm{dom}(G) = \{ f : f \text{ は，ある } X \text{ の真の始片上の関数} \}$$

となるような関数とする．このとき，X 上の関数 F で，すべての $x \in X$ に対し，

(2.18)　$F(x) = G(F \restriction X_{<x})$

となるようなものが，ちょうど一つ存在する．

(2) の証明を続ける．各 $\alpha \in \mathrm{On}$ に対し，

$$D_\alpha = \{ f : f \text{ は，ある } \beta \in \alpha \text{ に対し } \mathrm{dom}(f) = \beta \text{ となる関数} \}$$

として，$G \restriction D_\alpha$ に対し，定理 2.12′ を適用すると，すべての $\beta < \alpha$ に対し，$F'(\beta) = G(F' \restriction \beta)$ となるような α 上の関数 F' が一意に存在することが分かる．したがって，

21)　ここでの「関数」は，脚注 19 の意味である．

22)　置換公理により，$F``\alpha$ は集合になるから，$F \restriction \alpha \subseteq \alpha \times F``\alpha$ も集合となることに注意する．

$$(2.19)\qquad F = \{\langle\beta, F'(\beta)\rangle : F' \text{ は，ある } \alpha\in\mathrm{On}, \beta<\alpha \text{ 上の関数で すべての } \xi<\alpha \text{ に対し } F'(\xi)=G(F'\restriction\xi)\}$$

とすれば，F は求めるようなものとなる．■

ここで，保留にしてあった補題 2.22 の証明をみてみることにする．

補題 2.22 (1) は自然数の定義から明らかである．

補題 2.22 (2) は $\mathbb{N}$ が集合となることの議論の前に証明される必要があるので，整列集合上の帰納法による証明ではなく，定理 2.23 (1) のタイプの帰納法で示す必要がある．このために，X を補題 2.22 (2) でのようなものとして，

(2.20) $\alpha\in\mathrm{On}$ に対し，α が自然数なら $\alpha\in X$ となる

を $\alpha\in\mathrm{On}$ に関する帰納法で示す[23)]．$\alpha=0$ のときは，主張は明らかである．$\alpha\neq 0$ で，すべての $\beta<\alpha$ に対し主張が成り立ったとする．α が自然数でないときには主張は自明に成り立つ．α が自然数なら，α は後続順序数だから，$\alpha=\alpha^-+1$ となる α^- がとれるが，補題 2.22 (1) により，α^- も自然数である．したがって，帰納法の仮定から $\alpha^-\in X$ となり，X に対する仮定から，$\alpha=\alpha^-+1=\alpha^-\cup\{\alpha^-\}\in X$ となる．したがって，補題 2.22 (2) が示せた．

定理 2.23 の応用の一つとして，集合の累積的階層の定義をみることにする．On 上のクラス関数 $V(\alpha)$ を，

(2.21) $V(0)=\emptyset$;

(2.22) $V(\alpha+1)=\mathcal{P}(V(\alpha))$;

(2.23) γ が極限順序数のとき，$V(\gamma)=\bigcup_{\alpha<\gamma}V(\alpha)$

によって定義する[24)]．$V(\alpha)$ を V_α とも書くことにする．$\alpha\mapsto V_\alpha, \alpha\in\mathrm{On}$ を

23) これは定理 2.23 (1) との関係でいうと，そこでの $\varphi(\alpha)$ を “α は自然数 $\rightarrow \alpha\in X$” としたとき，(2.16) が成り立つことを示す，ということである．

24) 定理 2.23 (2) との対応では，$F=\{\langle\alpha, V(\alpha)\rangle : \alpha\in\mathrm{On}\}$ は，

(2.24) $G_0=\{\{\langle\emptyset,\emptyset\rangle\}\}$;

(2.25) $G_1=\{\langle f,\mathcal{P}(f(\alpha))\rangle : \alpha\in\mathrm{On},\ f \text{ は } \alpha+1 \text{ 上の関数 }\}$;

(2.26) $G_2=\{\langle f,\bigcup f``\gamma\rangle : \gamma \text{ は極限順序数で } f \text{ は } \gamma \text{ 上の関数 }\}$

V の累積的階層 (cumulative hierarchy) と呼ぶ[25]．実際，つぎの補題 2.24 で示すように $\alpha \mapsto V_\alpha$, $\alpha \in \mathrm{On}$ は増加的で，基礎の公理のもとでは，V_α, $\alpha \in \mathrm{On}$ は V の被覆となる．

ZF から基礎の公理を除いてできる体系を ZF^- と表すことにする．本節のここまでの部分で順序数の定義や基本的な性質の証明では基礎の公理は用いられていなかったことを再度注意しておく．

補題 2.24　ZF^- で議論する．

(1)　すべての $\alpha \in \mathrm{On}$ に対し，V_α は推移的である．

(2)　すべての $\alpha, \beta \in \mathrm{On}, \beta < \alpha$ に対し，$V_\beta \subseteq V_\alpha$ である．

(3)　すべての $\alpha \in \mathrm{On}$ に対し，$V_\alpha \cap \mathrm{On} = \alpha$ である．

(4)　基礎の公理が成り立つとき，$V = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha$ となる．

証明　(1), (2), (3) は α に関する帰納法により示せる．(4)：$V \neq \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha$ だったとして，x を $V - \left(\bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha\right)$ の元のうち $\in$ に関して極小なものとする[26]．このとき，x の極小性から，すべての $y \in x$ に対し $y \in \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha$ となる．したがって $x \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha$ である．x は集合だから，(2) により，十分に大きな $\alpha \in \mathrm{On}$ をとると $x \subseteq V_\alpha$ となる．したがって，(2.22) により $x \in V_{\alpha+1}$ となるが，これは x の選び方に矛盾である．　■

集合 X 上の 2 項関係 R は，

$$(2.27)\quad (\forall Y \subseteq X)\Big(Y \neq \emptyset \ \rightarrow\ (\exists y \in Y)(\neg \exists z \in Y(zRy))\Big)$$

を満たすとき，整順的 (well-founded) であるという．(2.27) でのような y のことを Y の R に関する極小元 (minimal element) と呼ぶことにする．

この用語を使うと，基礎の公理は，すべての集合 x に対し，関係 $\in$ が x 上で整順的である[27]，という主張としてとらえることができる．

として，$G = G_0 \cup G_1 \cup G_2$ として，この G に定理 2.23 (2) を適用することで得られる．(2.24), (2.25), (2.26) はそれぞれ，(2.21), (2.22), (2.23) に対応していることに注意する．

25)　V は，ここではすべての集合からなるクラス $\{x : x = x\}$ を表している（1.3 節のはじめの議論を参照）．

26)　(1.22) を参照．

27)　つまり，$\in \cap x^2$ は x 上で整順的である，ということ．

補題 2.25 ZF$^-$ で議論する.

(1) $x \in V_\alpha$ で $y \in x$ なら, $y \in V_\beta$ となる $\beta < \alpha$ が存在する.

(2) 任意の $\alpha \in \mathrm{On}$ に対し, $\in$ はすべての $x \in V_\alpha$ 上で整順的である.

証明 (1) : α が極限順序数なら, (2.23) により, $\beta < \alpha$ で $x \in V_\beta$ となるものがとれる. 補題 2.24 (1) により, $x \subseteq V_\beta$ だから, $y \in V_\beta$ となる. α が極限順序数でないなら, $\alpha = \beta + 1$ となる順序数 β をとると, (2.22) により, $x \subseteq V_\beta$ である. したがってこの場合にも $y \in V_\beta$ が分かる.

(2) : $x \in V_\alpha$ とする. $y \subseteq x$ を空でないとすると, 補題 2.24 (1) により $y \cap V_\alpha = y \neq \emptyset$ だから, $\alpha_0 = \min\{\beta \leq \alpha : y \cap V_\beta \neq \emptyset\}$ がとれる. $z \in y \cap V_{\alpha_0}$ とすると, z は y の $\in$ に関する極小元である. $w \in z$ とすると, (1) により, ある $\beta < \alpha_0$ に対し $w \in V_\beta$ となるから, α_0 の最小性から $w \notin y$ である. ■

系 2.26 ZF$^-$ 上, 基礎の公理と $V = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha$ は同値である.

証明 補題 2.24 (4) と補題 2.25 (2) による. ■

定理 2.10, 定理 2.12, 定理 2.17 は, それぞれ整順的な関係に関する定理に一般化できる.

集合 X 上の 2 項関係 E と $x \in X$ に対し,

(2.28) $\mathrm{ext}_E(x) = \{y \in X : yEx\}$

とする. $\mathrm{ext}_E(x)$ は x の E に関する外延 (extension) と呼ばれる. E が外延的 (extensional) とは, すべての $x, y \in X$ に対し,

(2.29) $x = y \ \Leftrightarrow \ \mathrm{ext}_E(x) = \mathrm{ext}_E(y)$

が成り立つこととする. X 上で $\in$ が外延的になるとき, X は外延的であるということにする[28].

28) 3.3 節で導入することになるモデル理論の用語を用いると, X が外延的とは, $\langle X, \in \rangle$ が外延性公理を満たすことに他ならない.

定理 2.27（整順的な関係上の帰納法） E を集合 X 上の整順的な関係とする．Φ を（パラメタを含む）$\mathcal{L}_{\in}$ 論理式として，

(2.30) X の E に関する極小元は Φ を満たし；

(2.31) すべての $x \in X$ に対し，$\mathrm{ext}_E(x)$ の元がすべて Φ を満たすなら x も Φ を満たす

が成り立つとする．このとき，すべての $x \in X$ は Φ を満たす．

証明 定理 2.10 の証明の変形により示せる． ■

定理 2.28（関数の再帰的定義） E を集合 X 上の整順的関係として，G を $V \times V$ 上のクラス関数とする．このとき，X 上の関数で，

(2.32) $F(x) = G(x, F \restriction \mathrm{ext}_E(x))$

がすべての $x \in X$ に対し成り立つようなものが一意に存在する．

証明 定理 2.12 の証明の変形により示せる． ■

定理 2.29（モストウスキの崩壊補題 (Mostowski's collapsing lemma)）

E を集合 X 上の外延的な整順的関係とする．このとき，推移的な集合 M と写像 $\pi : X \to M$ で，

$$\pi : \langle X, E \rangle \xrightarrow{\cong} \langle M, \in \rangle$$

となるものが一意に存在する．

証明 定理 2.17 の証明の変形により示せる． ■

定理 2.29 での M（または π）を $\langle X, E \rangle$ のモストウスキ崩壊 (Mostowski collapse) と呼ぶ．

補題 2.30 X を集合として X は外延的であるとする．$x \in X$ で $tcl(x) \subseteq X$ とする．このとき π を $\langle X, \in \rangle$ のモストウスキ崩壊とすると，$\pi \restriction tcl(x)$ は $tcl(x)$ 上の恒等写像となる．

証明 $tcl(x)$ は推移的だから，$\mathrm{id}_{tcl(x)} : tcl(x) \to tcl(x)$ は $\langle tcl(x), \in \rangle$ のモストウスキ崩壊になっている．一方，$\pi \restriction tcl(x)$ も $tcl(x)$ のモストウスキ崩壊だから，モストウスキ崩壊の一意性により，$\pi \restriction tcl(x) = \mathrm{id}_{tcl(x)}$ である．

■

定理 2.27，定理 2.28，定理 2.29 はそれぞれ X がクラスである場合に拡張できるが，この場合には，整順的な関係の定義をつぎのように補正しておく必要がある．

クラス X 上の 2 項関係 R が整順的 (well-founded) とは，

(2.33) (2.27) の条件を満たし；

(2.34) すべての $x \in X$ に対し $\mathrm{ext}_E(x)$ が集合になる

こととする．もちろん，(2.34) は X が集合の場合には無条件に成り立つ．

2.4 基数

この節では基数の全体のクラス Card を順序数の全体のクラスの部分クラスとして導入する．自然数 n に対し，$n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ だったことを思い出すと，集合 E が n 個の要素をもつ有限集合である（記号：$|E| = n$），という概念を

(2.35) $|E| = n \;\Leftrightarrow\; E$ から n への全単射が存在する

により定義してよいであろう．基数の概念は，このような有限集合の要素の個数の定義の拡張として自然に導入されるものになっている．

「整列可能性定理」として知られるつぎの命題は，（集合論の他の公理の仮定のもとで）選択公理と同値になる．

定理 2.31（整列可能性定理） ZFC のもとで，すべての集合 X に対し，$\langle X, < \rangle$ が整列順序となるような X 上の 2 項関係 $<$ が存在する．

ZF 上で整列可能性定理の命題を仮定すると，選択公理が示せることは容易に分かる．整列可能性定理を仮定すると，x が空集合を要素として含まない集合とするとき，$\bigcup x$ 上の整列順序 $<$ が存在するが，

$$f = \{\langle y, z\rangle : y \in x,\ z \text{ は } y \text{ の } < \text{ に関する最小元 }\}$$

とすると，f は x 上の選択関数となるからである．整列可能性定理の ZFC からの証明はつぎのようにして行うことができる．

定理 2.31 の証明　x を任意の集合とする．$x \neq \emptyset$ としてよい．f を $\mathcal{P}(x) - \{\emptyset\}$ 上の選択関数として，定理 2.23 (2) を用いて，On 上のクラス関数 g を，

$$g(\alpha) = \begin{cases} f(x - \{g(\beta) : \beta < \alpha\}) & (x - \{g(\beta) : \beta < \alpha\} \neq \emptyset \text{ のとき}) \\ x & (\text{それ以外のとき}) \end{cases} \tag{2.36}$$

とする．このとき，$\{\alpha \in \mathrm{On} : g(\alpha) = x\}$ が空だとすると，g は On から x への 1 対 1 写像となってしまい x が集合であることに矛盾である．$\alpha = \min\{\alpha \in \mathrm{On} : g(\alpha) = x\}$ とすると，$g_0 = g \restriction \alpha$ は α から x への全単射となるから，すべての $u \in x$ に対し，$\beta_u < \alpha$ で $g_0(\beta_u) = u$ となるものが一意に存在する．ここで $u_0, u_1 \in x$ に対し

$$u_0 < u_1 \quad \Leftrightarrow \quad \beta_{u_0} < \beta_{u_1}$$

として x 上の 2 項関係 $\leq$ を定義すれば，$<$ は x 上の整列順序となる．　■

整列可能性定理のもとで（したがって選択公理のもとで），任意の集合 X の濃度 (cardinality) $|X|$ をつぎのように定義することができる[29]．

$$|X| = \min\{\alpha \in \mathrm{On} : X \text{ から } \alpha \text{ への全単射が存在する }\}. \tag{2.37}$$

$|X| = \kappa$ のとき，X は濃度 κ をもつ，あるいは X は濃度 κ である，などという．整列可能性定理により，$\langle X, <\rangle$ が整列順序になるような，X 上の 2 項関係 $<$ が存在するが，$\langle X, <\rangle$ のモストウスキ像を α とすると，$\alpha \in \mathrm{On}$ で，モストウスキ同型写像は，X から α への全単射である．したがって，

29)　濃度には，Card X や#X などの記号を使う場合もある．

$\{\alpha \in \mathrm{On} : X$ から α への全単射が存在する $\}$ は空集合でなく，上の $|X|$ はすべての集合に対し，うまく定義できる．集合の濃度となるような On の元 κ は，

(2.38)　すべての $\alpha < \kappa$ に対し，α から κ への全単射は存在しない

という性質を満たすが，このような κ のことを基数 (cardinal) と呼ぶ[30]．

(2.39)　$\mathrm{Card} = \{\kappa : \kappa$ は基数 $\}$

とする．つぎのカントル・ベルンシュタインの同値定理（定理 2.33）により，κ が基数であることと，すべての $\alpha < \kappa$ に対し，α から κ への上射が存在しないことは同値である．

つぎの二つの命題は，集合の濃度や基数に関する基本的な性質である．補題 2.32 で x を可算集合としたものは，カントルにより 1873 年に発見された[31]．この発見によって集合論が数学の研究分野として確立された，とする数学史における解釈も可能である（[Kanamori 1994/2003] を参照）．

補題 2.32　x を集合とするとき，単射 $f : x \to \mathcal{P}(x)$ や全単射 $g : \mathcal{P}(x) \to {}^{x}2$ が存在するが[32]，上射 $h : x \to \mathcal{P}(x)$ は存在しない（したがって，もちろん全単射も存在しない）．

証明　$f : x \to \mathcal{P}(x); a \mapsto \{a\}$ は単射である．$g : \mathcal{P}(x) \to {}^{x}2; y \mapsto \mathrm{ch}_y$ は全単射である．ただし，$\mathrm{ch}_y : x \to 2$ は，y の特性関数とする．つまり，$a \in x$ に対し，

$$\mathrm{ch}_y(a) = \begin{cases} 1 & (a \in y \text{ のとき}) \\ 0 & (a \notin y \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義される関数である．

最後に $h : x \to \mathcal{P}(x)$ が上射だったとして矛盾を導く．

---

30)　この基数の定義自体は選択公理の仮定に依存していないことを注意しておく．

31)　x が可算なときには，$\mathcal{P}(x)$ から $\mathbb{R}$ への自然な単射により，$\mathcal{P}(x)$ と実数体 $\mathbb{R}$ が同一視できることに注意する．

32)　$2 = \{0, 1\}$ で ${}^{x}2 = \{f : f : x \to 2\}$ だった．

$$y = \{a \in x : a \notin h(a)\}$$

とする．$y \in \mathcal{P}(x)$ で，h は上射だから，$a^* \in x$ で，$h(a^*) = y$ となるものが存在する．

もし，$a^* \in y$ とすれば，y の定義から，$a^* \notin h(a^*) = y$ となり矛盾である．

一方 $a^* \notin y$ としても，y の定義から，$a^* \in h(a^*) = y$ となってしまい矛盾である．■

定理 2.33（カントル・ベルンシュタインの同値定理 (Cantor-Bernstein equivalence theorem)） A と C を集合として，$g : A \to C$ と $h : C \to A$ を単射とする．このとき，A から C への全単射が存在する．

証明 この定理は選択公理を用いずに証明できるが，まず，選択公理を用いた証明をみておくことにする[33)]．

$C' = g``A$ として，R' を C' 上の整列順序とする．R'' を $C - C'$ 上の整列順序として[34)]，

$$< \ = \ R' \cup R'' \cup \{\langle c', c'' \rangle : c' \in C',\, c'' \in C - C'\}$$

とすると，$<$ は C 上の整列順序になり，C' は $<$ に関して C の始片となる．したがって，$\pi : \langle C, < \rangle \overset{\cong}{\to} \langle \alpha, \in \rangle$ をモストウスキ写像とすると，$\beta = \pi``C'$ は α の始片となるから，$\beta \leq \alpha$ である．$\pi \circ g : A \to \beta$ は全単射だから，$|A| \leq \beta$ となる．したがって，$|A| \leq |C|$ である．h を用いて同様に議論すると $|C| \leq |A|$ が分かるから，$|A| = |C|$ である[35)]．したがって，$j : A \to |A|$ と，$k : C \to |C|$ をそれぞれ全単射とすると，$f = k^{-1} \circ j$ は A から C への全単射となる．

---

33) ゲーデルは，[Gödel 1947/64] で「新しい公理なしでも証明できる諸帰結のうちに，新しい公理の助けを借りた方がずっと簡単に証明でき，証明自体はるかに発見しやすくなり，さらには多くの別証明を一つの証明へと簡略化できるようになるものものがある」ことは，その公理の実証的な正しさに対する保証ととらえることが可能である場合もありえる，と論じている（本書第 II 部の第 1 章を参照）．この定理の証明や，補題 2.36 の証明は，この意味での選択公理の正しさに関する実証的な保証の一例とみることもできるであろう．

34) R' と R'' の存在を保証するために選択公理が用いられていることに注意する．

35) ここで "$\leq$" は Card 上の線形順序となっていることが用いられている．

選択公理を用いない定理 2.33 の証明は，上のものより構成的だが，いくぶん複雑なものとなる．以下でこの証明のスケッチを与える．まず，A と $C' = g``A$ を同一視することにより，$A \subseteq C$ で $g = \mathrm{id}_A$ としてよい．$C'' = h``C$ とすると，h は C から C'' への全単射で，$C'' \subseteq A \subseteq C$ となる．$n \in \omega$ に関する帰納法で，$D_0 = C - A$, $D_{n+1} = h``D_n$ とする．このとき，$C - \bigcup_{n\in\omega} D_n \subseteq C - D_0 \subseteq A$ で，$n > 0$ なら，D_n は C の部分集合の h による像であるから，$D_n \subseteq A$ となることに注意して，$f : C \to A$ を，$x \in C$ に対し，

$$(2.40)\quad f(x) = \begin{cases} h(x) & (\text{ある } n \in \omega \text{ に対し } x \in D_n \text{ のとき}) \\ x & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

とすると，f は全単射となる．したがって f^{-1} が求めるようなものとなっている． ■

補題 2.34 つぎが成り立つ．

(1) 自然数はすべて基数である．最小の無限順序数 ω は基数である．

(2) すべての無限基数は，極限順序数である．

(3) M が基数の集合なら，$\sup M$ $(= \bigcup M)$ は基数である．

証明 (1)：基数でない自然数があったとして，そのようなもののうち最小な n をとる．このとき $m < n$ で上射 $f : m \to n$ の存在するものがとれる．$m < n$ により $n \neq 0$ だから，$n = n^* \cup \{n^*\}$ となる $n^* < n$ がとれる．また，上射 $f : m \to n$ の存在により，$m \neq 0$ だから，同様に $m = m^* \cup \{m^*\}$ となる $m^* < m$ がとれる．必要なら f の 2 カ所での値を変更することで，$f(m^*) = n^*$ となっているとしてよい．このとき，$f' : m^* \to n^*$ を

$$f'(k) = \begin{cases} f(k) & (f(k) < m^* \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

と定義すると，f' は m^* から n^* への上射となるが，$m^* < n^* < n$ だから，これは n の最小性に矛盾である．

もしも ω が基数でなかったとすれば，ある自然数 n で上射 $f : n \to \omega$ の存在するようなものがとれる．$\ell < n$ に対し，$f'(\ell) = \min\{n, f(\ell)\}$ として

$f' : n \to n+1$ を定義すると f' は上射となるが，カントル・ベルンシュタインの同値定理により，これは，ここでの証明の前半により矛盾である．

(2)：α を無限順序数とする（つまり $\omega \leq \alpha$）．このとき α から $\alpha+1$ への写像 f を

$$f(\beta) = \begin{cases} \beta - 1 & (0 < \beta < \omega \text{ のとき}) \\ \beta & (\omega \leq \beta < \alpha \text{ のとき}) \\ \alpha & (\beta = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義すると，f は全単射となる．したがって $\alpha + 1$ は基数ではない．

(3)：M が最大元 κ^* をもつときは $\bigcup M = \kappa^*$ となるから，主張は明らかに成り立つ．M が最大元をもたないとする．$\bigcup M$ が順序数であることは補題 2.20 (6) によりよい．したがって，$\bigcup M$ が基数でなかったとすると，ある基数 $\kappa < \bigcup M$ で，上射 $f : \kappa \to \bigcup M$ の存在するものがある．$\kappa < \lambda$ となる $\lambda \in M$ をとると $\lambda \leq \bigcup M$ だから，$f' : \kappa \to \lambda$ を $\alpha \in \kappa$ に対し，

$$f'(\alpha) = \begin{cases} f(\alpha) & (f(\alpha) < \lambda \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

として定義すると，f' は κ から λ への上射となる．ところが $\lambda \in M$ により λ は基数だから，カントル・ベルンシュタインの同値定理により，これは矛盾である． ■

選択公理のもとで，つぎの補題は基数の定義から明らかである．

補題 2.35（AC[36]を仮定） x, y を集合とするとき，

(1) $|x| = |y|$ となるのは，全単射 $f : x \to y$ が存在する，ちょうどそのときである．

(2) $x \neq \emptyset$ のとき，以下の (i)–(iii) は同値である．

(i) $|x| \leq |y|$.

(ii) 単射 $f : x \to y$ が存在する．

36) ここで AC が仮定されているのは，AC を仮定しなかったときには，$|x|$ の定義されない集合が存在してしまうからである．

(iii) 上射 $g : y \to x$ が存在する．

補題 2.36　すべての基数 κ に対し，基数 μ で $\kappa < \mu$ となるものが存在する．とくに，Card は真のクラスである．

証明　この補題も選択公理を用いる証明と，選択公理を仮定しない ZF での証明の両方をみることにする．

選択公理を仮定したときには，補題の前半はつぎのように証明できる．x を $|x| = \kappa$ となる集合とする（たとえば $x = \kappa$ とすればよい）．補題 2.32 と補題 2.35 により，$\kappa = |x| < |\mathcal{P}(x)|$ となる．

これを選択公理を用いずに証明するにはつぎのようにすればよい．α を κ と同じ濃度の順序数とするとき，κ 上の 2 項関係 R で，$\langle \alpha, \in \rangle \cong \langle \kappa, R \rangle$ となるものが存在する．さらに，モストウスキの定理により，このような R に対し α は一意に決まる．したがって，置換公理により，

$$X = \{\alpha \in \mathrm{On} : \text{ある } \kappa \text{ 上の 2 項関係 } R \text{ に対し } \langle \alpha, \in \rangle \cong \langle \kappa, R \rangle\} \tag{2.41}$$

は集合となる．したがって 補題 2.20 (6) により $\mu = \bigcup X \in \mathrm{On}$ となる．X の定義から，κ から μ への上射は存在しない[37]．さらに X の定義から μ はそのようなもののうち最小なものとなるから，$\mu \in \mathrm{Card}$ となり，この μ が求めるようなものであることが分かる．

補題の後半の主張は，上で示したことと，補題 2.20 (7) からよい．　■

補題 2.36 により，すべての基数に対し，κ のつぎの基数が

$$\kappa^+ = \min\{\mu \in \mathrm{Card} : \kappa < \mu\} \tag{2.42}$$

として定義できる．補題 2.34 により，自然数における演算 $n \mapsto n+1$ は，ここで導入した $n \mapsto n^+$ と一致する．

つぎで定義される関数 $\aleph : \mathrm{On} \to \mathrm{Card}$ は[38]，無限基数を小さい順に枚挙する．

---

37)　もしそのようなものが存在するとすれば，κ から $\mu + 1$ への上射も存在するから，$\mu + 1 \in X$ となり，したがって $\mu \in \mu + 1 \subseteq \mu$ となるが，これは，補題 2.20 (4) に矛盾である．

38)　$\aleph$（アレフ）はヘブライ語のアルファベットの最初の文字である．

(2.43) $\aleph(0) = \omega$;

(2.44) $\aleph(\alpha + 1) = (\aleph(\alpha))^+$;

(2.45) $\aleph(\gamma) = \bigcup\{\aleph(\alpha) : \alpha < \gamma\}$ （γ が極限順序数のとき）.

補題 2.34 (3) により，すべての $\alpha \in \mathrm{On}$ に対し，$\aleph(\alpha)$ は基数となる．通常は $\aleph(\alpha)$ のことを $\aleph_\alpha$ と書く．$\aleph_\alpha$ が順序数でもあることを強調したいときには，ω_α という書き方もすることにする．$\aleph_\alpha$ の列は真に増加的である．すべての無限基数 κ は $\aleph_\alpha$ という形をしていて，このような $\alpha \in \mathrm{On}$ は一意に決まる．一意性は，$\alpha \mapsto \aleph_\alpha$ が定義から真に増加的であるからである．

無限基数で $\aleph_\alpha$ の形に表せないものが存在するとすると，$\mathrm{Card} - (\{\aleph_\alpha : \alpha \in \mathrm{On}\} \cup \omega)$ の最小元 μ がとれる．このとき，$\aleph_\alpha$, $\alpha \in \mathrm{On}$ の定義から，すべての α に対し $\aleph_\alpha < \mu$ が成り立つことが帰納法によって示せるから，$\{\xi \in \mathrm{On} : \xi < \mu\} \supseteq \{\aleph_\alpha : \alpha \in \mathrm{On}\}$ は集合となってしまうが，このことから，置換公理により，On も集合であることが結論できてしまい，補題 2.20 (7) に矛盾である．よって，

$$\mathrm{Card} - \omega = \{\aleph_\alpha : \alpha \in \mathrm{On}\}$$

である．

$|X| \leq \aleph_0$ となるような集合を可算集合 (countable set) と呼ぶ．$|X| = \aleph_0$ のとき，X が無限集合であることを強調したいときには，X は可算無限 (deumerable) である，という言い方をすることもある．$|X| > \aleph_0$ のとき X は不可算 (uncountable) である[39]という．

α が後続順序数で，$\kappa = \aleph_\alpha$ のとき（つまり，$\alpha = \beta + 1$ となる β があり，$\kappa = (\aleph_\beta)^+$ となるとき），κ を後続基数 (successor cardinal) と呼ぶ．また α が極限順序数で，$\kappa = \aleph_\alpha$ となるとき，κ を極限基数 (limit cardinal) と呼ぶ．

39) 日本語の文献では，「非可算」という言い方の方が普通である．「不可算」という言い方は，愛媛大学の藤田博司氏の提唱による．

2.5 基数算術

κ と λ を基数とするとき，$\kappa+\lambda$, $\kappa\cdot\lambda$, κ^λ をつぎのように定義する．集合 A, B を $|A|=\kappa$, $|B|=\lambda$ となるようにとる．ただし $A\cap B=\emptyset$ となるようにしておく[40]．このとき，

$$\kappa+\lambda=|A\cup B|,\quad \kappa\cdot\lambda=|A\times B|,\quad \kappa^\lambda=|{}^BA|$$

とする[41]．これらの定義は A と B のとり方に依存しない．つまり，$|A|=|A'|$, $|B|=|B'|$ なら，$|A\cup B|=|A'\cup B'|$（ただし，この場合にはとくに $A\cap B=A'\cap B'=\emptyset$ となっているとする），$|A\times B|=|A'\times B'|$, $|{}^BA|=|{}^{B'}A'|$ の成り立つことが容易に示せる．

λ を基数とするとき，$f\in{}^\lambda 2$ に $f^{-1}``\{1\}\in\mathcal{P}(\lambda)$ を対応させる写像は全単射となる．したがって $|\mathcal{P}(\lambda)|=|{}^\lambda 2|=2^\lambda$ となる．

つぎは上の定義からただちに導ける．

補題 2.37 κ, λ, μ を基数とする．このときつぎが成り立つ．

(1) $\kappa+\lambda=\lambda+\kappa,\quad \kappa\cdot\lambda=\lambda\cdot\kappa.$

(2) $(\kappa+\lambda)+\mu=\kappa+(\lambda+\mu),\quad (\kappa\cdot\lambda)\cdot\mu=\kappa\cdot(\lambda\cdot\mu).$

(3) $\kappa\cdot(\lambda+\mu)=\kappa\cdot\lambda+\kappa\cdot\mu.$

(4) $(\kappa\cdot\lambda)^\mu=\kappa^\mu\cdot\lambda^\mu.$

(5) $\kappa^{\lambda+\mu}=\kappa^\lambda\cdot\kappa^\mu.$

(6) $(\kappa^\lambda)^\mu=\kappa^{\lambda\cdot\mu}.$

(7) $\kappa\le\kappa'$, $\lambda\le\lambda'$（κ', λ' は基数）とするとき，

---

40) たとえば，必要なら，A と B をそれぞれ $A\times\{0\}$ と $B\times\{1\}$ で置き換えればよい．

41) A と B の整列順序が与えられたとき（$|A|=\kappa$, $|B|=\lambda$ の仮定から A 上にも B 上にも整列順序が存在する），後出の補題 4.5 のようにして，ZF で $A\cup B$ と $A\times B$ 上の整列順序を構成することができる．したがって，$\kappa+\lambda$ や $\kappa\cdot\lambda$ は ZF で定義でき，つぎの補題 2.37 (1)–(3), (7) も選択公理を用いずに ZF で証明できている．また，補題 2.40，補題 2.41 と定理 2.42 (1) も選択公理なしに ZF で証明されていることは容易に確かめることができる．これに対して，${}^BA$ や $\bigcup A$ 上の整列順序，したがって，これらの集合の濃度の存在を示すためには，一般には選択公理が必要となる．

$$\kappa + \lambda \leq \kappa' + \lambda', \quad \kappa \cdot \lambda \leq \kappa' \cdot \lambda', \quad \kappa^\lambda \leq \kappa'^{\lambda'}.$$

$\mathrm{On}^2 = \mathrm{On} \times \mathrm{On}$ 上の半順序 $<$ をつぎのように定義する.

$$\begin{aligned}\langle \alpha, \beta \rangle < \langle \gamma, \delta \rangle \ \Leftrightarrow\ & \max\{\alpha, \beta\} < \max\{\gamma, \delta\} \\ & \text{または } (\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\gamma, \delta\} \ \text{かつ} \ \alpha < \gamma) \\ & \text{または } (\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\gamma, \delta\} \ \text{かつ} \ \alpha = \gamma \\ & \qquad \text{かつ} \ \beta < \delta).\end{aligned}$$

つぎは $<$ の定義から容易に示せる.

補題 2.38 $<$ は On^2 上の線形順序である.

補題 2.39 すべての $\nu \in \mathrm{On}$ に対し, $\nu \times \nu$ は On^2 の $<$ に関する真の始片で, $\nu \times \nu = \{(\alpha, \beta) : (\alpha, \beta) < (0, \nu)\}$ となる.

証明 $\langle \alpha, \beta \rangle \in \nu \times \nu$ で $\langle \xi, \eta \rangle < \langle \alpha, \beta \rangle$ とすると, $\max\{\xi, \eta\} \leq \max\{\alpha, \beta\} < \nu$ だから, $\langle \xi, \eta \rangle \in \nu \times \nu$ となる. したがって, $\nu \times \nu$ は On^2 の $<$ に関する真の始片である. $<$ の定義から, $\langle 0, \nu \rangle$ が $\mathrm{On}^2 - (\nu \times \nu)$ の最小元となることは明らかである. ■

補題 2.40 $<$ は On^2 上の整列順序となる[42].

証明 すべての $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathrm{On}^2$ に対し, $\langle \alpha, \beta \rangle$ の定める On^2 の $<$ に関する始片が集合となっていることは補題 2.39 によりよい.

$X \subseteq \mathrm{On}^2$ が空でないなら, X は $<$ に関する最小元をもつことを示す. まず, $\alpha_1 = \min\{\max\{\alpha, \beta\} : \langle \alpha, \beta \rangle \in X\}$ として $X_1 = \{\langle \alpha, \beta \rangle \in X : \max\{\alpha, \beta\} = \alpha_1\}$ とする. $\alpha_2 = \min\{\alpha :$ ある β に対し $\langle \alpha, \beta \rangle \in X_1\}$ として, $X_2 = \{\langle \alpha, \beta \rangle \in X_1 : \alpha = \alpha_2\}$ とする. さらに, $\alpha_3 = \min\{\beta : \langle \alpha_2, \beta \rangle \in X_2\}$ とする. このとき, $<$ の定義から, $\langle \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ は X の最小元となる. ■

$(\mathrm{On}^2, <)$ は整列順序となっている真のクラスだから, とくに外延的である. したがって, 定理 2.29 のクラスへの拡張により, $(\mathrm{On}^2, <)$ のモストウスキ

42) つまり, $<$ は, (2.33) と (2.34) の意味で整順的な On^2 上の全順序である.

崩壊が存在するが[43)]，それは推移的なクラスで $\in$ によって整列されるから，On に他ならない．したがって，

$$K : (\mathrm{On}^2, <) \to (\mathrm{On}, \in)$$

となる順序同型 K が一意に存在することが分かる．補題 2.39 により，$K``\nu \times \nu$ は $(\mathrm{On}, \in)$ の真の始片となり，したがって，On の元となる．

補題 2.41 (1) すべての $n, m \in \omega$ に対し，$K(\langle m, n \rangle) < \omega$ となる．

(2) すべての無限基数 κ に対し，$K(\langle 0, \kappa \rangle) = \kappa$ となる．

(3) すべての無限基数 κ に対し，$\kappa \cdot \kappa = \kappa$ が成り立つ．

証明 (1)：$k = \max\{m, n\} + 1$ とすると，$\langle m, n \rangle < \langle 0, k \rangle$ となる．補題 2.39 により，$\{\langle \alpha, \beta \rangle : \langle \alpha, \beta \rangle < \langle 0, k \rangle\} = k \times k$ となるから，$|k \times k| < \omega$ により，$K(\langle m, n \rangle) < K(\langle 0, k \rangle) < \omega$ である．

(2) と (3)：$\kappa \in \mathrm{Card}$, $\kappa \geq \aleph_0$ に関する帰納法により示す．$\kappa = \aleph_0$ のときには，補題 2.39 と (1) により $K(\langle 0, \omega \rangle) = \{K(\langle m, n \rangle) : m, n \in \omega\} = \omega$ となるから，(2) が成り立つことが分かる．したがって，$K \restriction \omega \times \omega$ は $\omega \times \omega$ から ω への全単射となる．よって $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ が分かる．

すべての基数 $\lambda < \kappa$ に対し，(2) と (3) が成り立つと仮定して，κ に対しても (2) と (3) が成り立つことを示す．$|\kappa \times \kappa| \geq \kappa$ だから，$K(\langle 0, \kappa \rangle) = K``\kappa \times \kappa \geq \kappa$ である．一方，帰納法の仮定から，すべての $\alpha < \kappa$ に対し，$|\alpha \times \alpha| = |\alpha| < \kappa$ となる．したがって，$K(\langle 0, \alpha \rangle) < \kappa$ である．$\langle 0, \kappa \rangle$ は $\langle 0, \alpha \rangle$, $\alpha < \kappa$ の極限となっているから，$K(\langle 0, \kappa \rangle) \leq \kappa$ が分かる．したがって，$\kappa \times \kappa = K(\langle 0, \kappa \rangle) = \kappa$ となり，$K \restriction \kappa \times \kappa$ は $\kappa \times \kappa$ から κ への全単射となることが分かるから，$\kappa \cdot \kappa = \kappa$ が帰結される． ■

定理 2.42 (1) κ, λ を $\kappa \geq \omega$ または $\lambda \geq \omega$ となるような基数とする．このとき，$\kappa + \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$ となる．もし $\kappa, \lambda \neq 0$ なら，$\kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$ である．

(2) κ, λ を無限基数とする．$|X| \leq \kappa$ で，すべての $x \in X$ に対して $|x| \leq \lambda$ となるとき，$|\bigcup X| \leq \max\{\kappa, \lambda\}$ が成り立つ．

43) 補題 2.30 の後を参照．

証明　(1)：κ か λ のどちらかが 0 のときは，定理の前半は明らかである．そこで $\kappa \neq 0, \lambda \neq 0$ とする．このとき $(\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})$ から $\kappa \times \lambda$ への単射が容易に定義できるから，$\kappa + \lambda \leq \kappa \cdot \lambda$ となることが分かる．ところが，$\mu = \max\{\kappa, \lambda\}$ とすると，補題 2.41 により，

$$\mu \leq \kappa + \lambda \leq \kappa \cdot \lambda \leq \mu \cdot \mu = \mu$$

となるから定理の主張が実際に成り立つことが分かる．

(2)：$X = \emptyset$ のときには，主張は明らかである．そうでないときには，$|X| \leq \kappa$ により，$X = \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ と枚挙できる[44]．一般性を失うことなく，すべての x_α は空でない，としてよい．すべての $\alpha < \kappa$ に対し，$|x_\alpha| \leq \lambda$ により，$x_\alpha = \{a_{\alpha,\beta} : \beta < \lambda\}$ と枚挙できる．ここで $g : \kappa \times \lambda \to \bigcup X$ を $g(\langle\alpha, \beta\rangle) = a_{\alpha,\beta}$ により定義すると g は上射となるから，補題 2.35 (2) と (1) により $|\bigcup X| \leq \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$ である．■

系 2.43　κ, μ を $2 \leq \mu \leq 2^\kappa, \omega \leq \kappa$ となるような基数とするとき，$\mu^\kappa = 2^\kappa$ となる．とくに，$\kappa^\kappa = 2^\kappa$ である．

証明　$2^\kappa \leq \mu^\kappa \leq (2^\kappa)^\kappa = |{}^{\kappa\times\kappa}2| = 2^{\kappa\cdot\kappa} = 2^\kappa$ によりよい．最後の等式は補題 2.41 (3) による．■

以上の結果により，無限基数の足し算とかけ算 $\kappa + \lambda, \kappa \cdot \lambda$ の構造は完全に解明されたといえるが，基数のベキ乗 κ^λ については，多くの問題が残されている．これについては，連続体仮説（2.7 節を参照）のように，普通の集合論の範囲では決定できない問題も数多く存在する．

なお，基数算術に関しては，シェラハによる最近の研究により，多くの深い結果が得られている．シェラハ自身の [Shelah 1994] は，初学者向けとは言いがたいので，シェラハの基数算術の勉強をはじめたいならこの分野の入門書の一つである [Holz *et al.* 1999] から入るのもよいであろう．

44)　補題 2.35 (2) により κ から X への上射 f が存在するから，$x_\alpha = f(\alpha)$ とすればよい．

2.6 共終数

$\alpha \in \mathrm{On}$ として，$X \subseteq \alpha$ が α で共終 (cofinal) であるとは，すべての $\beta < \alpha$ に対し，$\gamma \in X$ で $\beta \leq \gamma$ となるものが存在することである．α の共終数 (cofinality) $cf(\alpha)$ を，

$$cf(\alpha) = \min\{|X| : X \subseteq \alpha,\ X \text{ は } \alpha \text{ で共終}\}$$

と定義する．

補題 2.44 すべての $\kappa \in \mathrm{Card}$ に対し，$cf(\kappa^+) = \kappa^+$ となる．

証明 $X \subseteq \kappa^+$ が κ^+ で共終とすると，すべての $\beta \in X$ に対し，$|\beta| \leq \kappa$ となるから，もし $|X| \leq \kappa$ とすると，定理 2.42 (2) により，$\kappa^+ = |\kappa^+| = |\bigcup X| \leq \kappa \times \kappa = \kappa$ となり矛盾である． ■

κ が，$cf(\kappa) = \kappa$ を満たすとき κ は基数となるが，このような κ を正則基数 (regular) と呼ぶ．補題 2.44 により，後続基数はすべて正則基数である．これに対し，正則な極限基数の存在は ZFC では証明できない（定理 4.11 を参照）．

たとえば，$cf(\aleph_\omega) = \omega$ である．$\{\omega_n : n \in \omega\}$ が $\aleph_\omega$ で共終になるからである．とくに $\aleph_\omega$ は正則でない．

基数 κ が正則である，という条件は，つぎのようにいいかえることもできる．

補題 2.45 基数 κ が正則であることとつぎは同値である．

(2.46) $\lambda < \kappa$ で，各 $\alpha < \lambda$ に対し，$|X_\alpha| < \kappa$ とするとき，$|\bigcup_{\alpha<\lambda} X_\alpha| < \kappa$ となる．

証明 X_α, $\alpha < \lambda$ を (2.46) のようなものとする．もし，$|\bigcup_{\alpha<\lambda} X_\alpha| = \kappa$ だったとすると，$X = \{|\bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta| : \alpha < \lambda\}$ は $\kappa = |\bigcup_{\alpha<\lambda} X_\alpha|$ で共終となるが，$|X| \leq \lambda < \kappa$ だから，κ は正則でない．

逆にκが正則でなければ，κで共終な$X \subseteq \kappa$で$|X| < \kappa$となるものがあるが，$|X| = \lambda$として，$f : \lambda \to X$を上射とし，$\alpha < \lambda$に対し，$X_\alpha = f(\alpha)$とすれば，X_α, $\alpha < \lambda$は(2.46)の反例となる． ■

つぎの定理はカントルの定理（補題2.32の後半）の拡張となっている．

定理 2.46（ケーニヒの定理(König's theorem)） κを任意の無限基数とするとき，$\kappa^{cf(\kappa)} > \kappa$が成り立つ．

証明 $\{f_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq {}^{cf(\kappa)}\kappa$とするとき，つねに$f \in {}^{cf(\kappa)}\kappa - \{f_\alpha : \alpha < \kappa\}$がとれることを示せばよい．

$\{\alpha_\xi : \xi < cf(\kappa)\} \subseteq \kappa$を$\kappa$で共終とする．このとき，$f : cf(\kappa) \to \kappa$を，

$$f(\xi) = \min(\kappa - \{f_\alpha(\xi) : \alpha < \alpha_\xi\})$$

で定義する．$|\{f_\alpha(\xi) : \alpha < \alpha_\xi\}| < \kappa$だから，$\kappa - \{f_\alpha(\xi) : \alpha < \alpha_\xi\} \neq \emptyset$となり，この定義は可能である．すべての$\alpha < \kappa$に対し，$f \neq f_\alpha$である．$\alpha < \alpha_\xi$となる$\xi < cf(\kappa)$がとれるが，$f$の定義から$f(\xi) \neq f_\alpha(\xi)$となるからである．したがって証明が完了した． ■

定理 2.47 すべての無限基数κに対し，$cf(2^\kappa) > \kappa$が成り立つ．

証明 $cf(2^\kappa) \leq \kappa$だったとすると，定理2.46により，

$$2^\kappa = 2^{\kappa\cdot\kappa} = (2^\kappa)^\kappa \geq (2^\kappa)^{cf(2^\kappa)} > 2^\kappa$$

となり矛盾である． ■

2.7 連続体仮説

補題2.32により$\kappa < 2^\kappa$となる．とくに$\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$であるが，1.1節でも述べたことからも分かるように$\mathbb{R}$と${}^\omega 2$とはほとんど位相同型になり，とくに濃度に関しては$|\mathbb{R}| = |{}^\omega 2| = 2^{\aleph_0}$となることが分かる．連続体仮説(Continuum Hypothesis — CHと略）は$2^{\aleph_0} = \aleph_1$という主張である[45)]．

45) 本節ではACをつねに仮定している．

後述の定理 4.9 と定理 4.19 により，連続体仮説は集合論の公理系から独立である — つまり ZFC から証明できないし，その否定も証明できない．ちなみに，集合論の専門家の間では，連続体仮説の否定の方が正しいと考えられることが多い[46]．ゲーデルは晩年に $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ を導く公理を提案している ([Gödel 1970], [竹内 1998，付録] も参照)．連続体の構造に関しては，「実数の集合論」と呼ばれる 1980 年代以降に活発に研究されている研究分野での多くの結果の蓄積がある[47]．[Brendle *et al.* 200?] はそのような結果をふまえた，ゲーデルの公理に関する現代の視点からの再論となっている．

連続体仮説をすべての無限基数に対して一般化した，

$$(\forall\kappa \in \mathrm{Card})(2^\kappa = \kappa^+)$$

は一般連続体仮説 (Generalized Continuum Hypothesis) と呼ばれ，GCH と略される．

$|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ だから，連続体仮説は $\mathbb{R}$ を $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ と枚挙できる，という主張と同値である．このことを使うと連続体仮説のつぎのような特徴付けを証明することができる．

定理 2.48 ([Sierpiński 1934]) つぎの命題は ZFC 上で連続体仮説と同値である．

実平面 $\mathbb{R}^2$ の分割 $\mathbb{R}^2 = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ で，

(i) すべての $x \in \mathbb{R}$ に対し，$A \cap (\{x\} \times \mathbb{R})$ は可算となり；

(ii) すべての $y \in \mathbb{R}$ に対し $B \cap (\mathbb{R} \times \{y\})$ は可算となる

ようなものが存在する．

証明 CH が成り立つとして，$\mathbb{R} = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ とする．このとき，$A = \{\langle x_\alpha, x_\beta\rangle : \alpha, \beta \in \omega_1, \alpha > \beta\}$, $B = \{\langle x_\alpha, x_\beta\rangle : \alpha, \beta \in \omega_1, \alpha \leq \beta\}$ とすれば，$\mathbb{R}^2 = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ となるが，A, B は定理の (i), (ii) を満たす．$x \in \mathbb{R}$ とすると，$x = x_{\alpha^*}$ となる $\alpha^* < \omega_1$ がとれるが，このとき

46) このあたりの事情については，[渕野 2000] や [渕野 2004] の解説も参照されたい．

47) 実数の集合論については，たとえば [Bartoszyński and Judah 1995] を参照されたい．

$A \cap (\{x\} \times \mathbb{R}) = \{\langle x_{\alpha^*}, x_\beta \rangle : \beta < \alpha^*\}$ となるから，$|A \cap (\{x\} \times \mathbb{R})| \leq |\alpha^*| \leq \aleph_0$ となる．同様にして $|B \cap (\mathbb{R} \times \{y\})| \leq \aleph_0$ も示せる．

つぎに CH が成り立たないと仮定する．$\mathbb{R}^2 = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ として，A が (i) を満たすとする．$r_\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha < \omega_1$ を互いに異なるものとして，

$$\begin{aligned} C &= \{x \in \mathbb{R} : \text{ある } \alpha < \omega_1 \text{ に対し } \langle r_\alpha, x \rangle \in A\} \\ &= \textstyle\bigcup_{\alpha < \omega_1} \{x \in \mathbb{R} : \langle r_\alpha, x \rangle \in A\} \end{aligned}$$

とすると，C の濃度は，高々 $\aleph_1$ である．したがって，$\neg$CH の仮定により $\mathbb{R} - C$ は空でない．$y^* \in \mathbb{R} - C$ をとると，$\{\langle x_\alpha, y^* \rangle : \alpha < \omega_1\} \subseteq \mathbb{R}^2 - A = B$ となるから $(\mathbb{R} \times \{y^*\}) \cap B$ は不可算となり，(ii) を満たさない． ■

つぎの定理は上の定理の興味深い応用の一つである．

定理 2.49（[Sierpiński 1920]） 連続体仮説を仮定する．このとき，関数 $f : [0,1]^2 \to [0,1]$ で，積分 $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy$ および $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx$ は存在するが，それらの値が等しくならないようなものがとれる．

証明 $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ を定理 2.48 でのようにとり，f を B の特性関数とする．$y \in [0,1]$ に対し，$\{x \in [0,1] : f(x,y) \neq 0\} = B \cap ([0,1] \times \{y\})$ は高々可算である．したがって，

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 0\,dy = 0$$

となる．同様に，各 $x \in [0,1]$ に対し，$\{y \in [0,1] : f(x,y) \neq 1\} = A \cap (\{x\} \times [0,1])$ は高々可算だから，

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 1\,dx = 1$$

となる．よって，$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy$ である． ■

トネリの定理により，f が可測なら，$\int_0^1 \int_0^1 f\,dxdy$ と $\int_0^1 \int_0^1 f\,dydx$ は両方とも存在する場合には等しくなる．上の定理は，CH のもとでは，トネリの

定理での f の可測性の条件が落とせないことを示している．定理 2.49 の命題は，連続体仮説の否定 $\neg$CH のもとではその真偽は決まらないことが知られている．

定理 2.50（ラスコビッチ・フリードマン・フライリンク[48)]） つぎの命題は ZFC と矛盾しない．

すべての関数 $f : [0,1]^2 \to [0,1]$ に対し，$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy$ と $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx$ が存在するときにはこれらが等しくなる．

一方，定理 2.49 の命題が連続体仮説の否定のもとで成立するような状況は簡単につくりだすことができる．定理 2.49 の証明は，

(1) $\mathbb{R}$ の分割 $\mathbb{R} = A \cup B$ で，

(i) すべての $s \in \mathbb{R}$ に対し，$|\,A \cap (\{x\} \times \mathbb{R})\,| < 2^{\aleph_0}$ となり，

(ii) すべての $y \in \mathbb{R}$ に対し，$|\,B \cap (\mathbb{R} \times \{y\})\,| < 2^{\aleph_0}$ となる

ようなものが存在する；

(2) 濃度 $2^{\aleph_0}$ 未満の $\mathbb{R}$ の部分集合は，すべて零集合である

が成り立てば，同様に行うことができる．ここで，(1) は ZFC で証明できる命題である．$\mathbb{R} = \{x_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ と枚挙して定理 2.48 と同様に証明すればよい．(2) は「実数の集合論」での用語でいえば，$non(\mathcal{N}) = 2^{\aleph_0}$ ということであるが，これは，たとえば，マーティンの公理のもとで成立する[49)]．

連続体仮説の特徴付けは，定理 2.48 以外にもいろいろと知られている．ここでは，解析学的な言葉による特徴付け（定理 2.51）と，線形代数の言葉による特徴付け（定理 2.52）を一つずつみてみることにする．筆者はつぎの定理を [Aigner and Ziegler 1998] で学んだ．

定理 2.51（[Erdős 1964]） 連続体仮説は ZFC 上でつぎの命題と同値である．

---

48) 出典については [Ciesielski 1997] の文献表を参照．

49) マーティンの公理は CH を弱めた命題で，ZFC + $\neg$CH と矛盾しないことが知られている．この公理については，[Jech 1978/2003], [Kunen 1980] などを参照されたい．なお，[渕野 2004] には，マーティンの公理の集合論的な意味付けの議論についての解説がある．

(2.47) 解析関数の不可算な族 $\mathcal{F}$ で，すべての $z \in \mathbb{C}$ に対し，$\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ が可算になるようなものが存在する．

証明 まず，CH の否定を仮定する．$\mathcal{F}$ を解析関数の不可算族とするとき，$z \in \mathbb{C}$ で $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ が不可算になるようなものが必ず存在することを示す．f_α, $\alpha < \omega_1$ を $\mathcal{F}$ の互いに異なる元とする．$\alpha, \beta \in \omega_1$, $\alpha \neq \beta$ に対し，$S_{\alpha,\beta} = \{z \in \mathbb{C} : f_\alpha(z) = f_\beta(z)\}$ とすれば，f_α, f_β は異なる解析関数なので，一致の定理から，$S_{\alpha,\beta}$ は可算となる．したがって，仮定から，$S = \mathbb{C} - \bigcup\{S_{\alpha,\beta} : \alpha, \beta \in \omega_1, \alpha \neq \beta\}$ とすれば $S \neq \emptyset$ となる．$z^* \in S$ とすれば，$f_\alpha(z^*), \alpha < \omega_1$ は互いに異なるから，$\{f(z^*) : f \in \mathcal{F}\}$ は不可算になることが分かる．

つぎに，CH を仮定して，解析関数の不可算な族 $\mathcal{F}$ で，どの $z \in \mathbb{C}$ に対しても $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ が可算になるようなものが存在することを示す．$\mathbb{C} = \{v_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ として，解析関数の列 $f_\alpha, \alpha < \omega_1$ を，つぎを満たすように構成する．

(2.48) すべての $\beta < \alpha$ に対し，$f_\alpha \neq f_\beta$ で，$f_\alpha(v_\beta)$ は（複素）有理数である．

これが可能であることはつぎのようにして分かる．$f_\beta, \beta < \alpha$ が構成されたとき，$\{v_\beta : \beta < \alpha\}$ を $\{w_n : n \in \omega\}$ と枚挙しなおし，$\{f_\beta : \beta < \alpha\}$ を $\{g_n : n \in \omega\}$ と枚挙しなおす．これは $\alpha < \omega_1$ により可能である．複素有理数列 $\varepsilon_n > 0, n \in \omega$ を，

$$(2.49) \quad f_\alpha(z) = \varepsilon_0(z - w_0) + \varepsilon_1(z - w_0)(z - w_1) + \varepsilon_2(z - w_0)(z - w_1)(z - w_2) + \cdots$$

としたときに，$f_\alpha(z)$ がすべての z でうまく定義されるように帰納的にとる．さらにこの帰納的な構成での各 n ステップで，ε_n の値を $f_\alpha(w_{n+1}) \neq g_\alpha(w_{n+1})$ となるように調節できる．このとき，(2.49) のように定義される f_α は (2.48) を満たす．$\mathcal{F} = \{f_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ とすれば，$\mathcal{F}$ は求めるようなものとなっている． ■

K を体として，J を K の部分体とするとき，K は J 上の線形空間とみられることに注意する．とくに，$\mathbb{R}$ は $\mathbb{Q}$ 上の線形空間とみることができる．このことを用いて，CH をつぎのように特徴付けることができる．

定理 2.52（エルデシュ・角谷の定理 (Erdős-Kakutani theorem)） 連続体仮説は ZFC 上でつぎの命題と同値である．

(2.50) $\mathbb{R}$ の部分集合 $X_n, n \in \omega$ で，各 X_n は $\mathbb{Q}$ 上線形独立で $\mathbb{R} = \{0\} \cup \bigcup_{n\in\omega} X_n$ となるものが存在する．

選択公理のもとでは，線形空間の基底の存在定理が成り立つので，上のような X_n は $\mathbb{R}$ の $\mathbb{Q}$ 上の基底に拡張することができる．$\mathbb{R}$ の $\mathbb{Q}$ 上の基底はハメル基底 (Hamel basis) と呼ばれる．したがって，(2.50) は，「$\mathbb{R} - \{0\}$ は可算個のハメル基底で覆うことができる」といいかえることができる．

定理 2.52 の証明には，つぎの準備が必要となる．κ を正則基数として，$C \subseteq \kappa$ が閉非有界とは，

(2.51) すべての極限順序数 $\alpha < \kappa$ に対し $C \cap \alpha$ が α で共終なら，$\alpha \in C$ となり；

(2.52) すべての $\alpha < \kappa$ に対し $C - \alpha \neq \emptyset$（つまり C は κ で共終）である

こととする[50)]．C は κ で閉非有界 (closed unbounded) である，あるいは，C は κ の閉非有界な部分集合であるともいう[51)]．

S を κ の部分集合とする．すべての κ で閉非有界な $C \subseteq \kappa$ に対し，$S \cap C \neq \emptyset$ となるとき，S は κ で定常 (stationary) であるという．S は κ の定常な部分集合である，という言い方をすることもある．

補題 2.53 κ を正則基数で $\kappa > \omega$ とする．このとき，以下が成り立つ．

(1) $C, C' \subseteq \kappa$ が閉非有界なら，$C \cap C'$ も閉非有界である．

---

50) (2.51) が成り立つとき，C は閉じている (closed) という．また (2.52) が成り立つとき，C は κ で非有界 (unbounded) であるという．

51) C が閉非有界であることは，「C は κ の club 部分集合である」，と表現されることもある．ここでの "club" は <u>cl</u>osed <u>u</u>n<u>b</u>ounded からの造語である．

(2) $S \subseteq \kappa$ は閉非有界なら定常である.

(3) $S \subseteq \kappa$ が定常なら $|S| = \kappa$ である.

(4) $\lambda < \kappa$ で，各 $\xi < \lambda$ に対し C_ξ が κ の閉非有界な部分集合なら，$\bigcap_{\xi<\lambda} C_\xi$ も κ で閉非有界である.

証明 (1)：$C \cap C'$ が (2.51) と (2.52) を満たすことを示せばよい.

(2.51) の証明：$\alpha < \kappa$ が極限順序数で，$\alpha \cap (C \cap C')$ は α で共終とすると，$\alpha \cap C$ も α で共終だから，C が閉非有界により，$\alpha \in C$ となる．同様に $\alpha \in C'$ となるから，$\alpha \in C \cap C'$ である.

(2.52) の証明：$\alpha < \kappa$ を任意にとるとき，順序数の上昇列 $\alpha_n, n \in \omega$ をつぎのように定義する.

(2.53) $\alpha_0 = \alpha;$

(2.54) $\alpha_{2n+1} = \min(C - (\alpha_{2n} + 1));$

(2.55) $\alpha_{2n+2} = \min(C' - (\alpha_{2n+1} + 1)).$

(2.54) と (2.55) は C と C' が閉非有界であることから可能である．このとき，$\beta = \sup_{n\in\omega} \alpha_n$ とすれば，κ は正則な非可算基数だから，$\beta < \kappa$ で，(2.53) により $\alpha < \beta$ である．(2.54) と (2.55) により，$C \cap \beta$ と $C' \cap \beta$ はともに β で共終となるから，$\beta \in C \cap C'$ が分かる.

(2) は (1) と定常の定義から明らかである.

(3)：任意の $\alpha < \kappa$ に対して $C = \kappa - \alpha$ は κ で閉非有界だから，$S \cap C \neq \emptyset$ により S は α より大きな元を含むことが分かる．したがって，S は κ で共終である．κ は正則だから，$|S| = \kappa$ である.

(4)：基数 $\lambda < \kappa$ に関する帰納法で示す．λ が有限のときには，(1) によりよい．$\lambda < \kappa$ より小さい基数について (4) の命題がすでに示されたと仮定する．$\xi < \lambda$ に対し C_ξ が κ で閉非有界とするとき，$C = \bigcap_{\xi<\lambda} C_\xi$ が閉非有界となることを示す．このためには C が (2.51) と (2.52) を満たすことを示せばよい.

(2.51) の証明：極限順序数 $\alpha < \kappa$ に対し，$\alpha \cap C$ が α で共終とすると，

すべての $\xi < \lambda$ に対し，$\alpha \cap C_\xi$ も α で共終だから，C_ξ が閉非有界により，$\alpha \in C_\xi$ である．したがって，$\alpha \in \bigcap_{\xi<\lambda} C_\xi = C$ である．

(2.52) の証明：任意の $\alpha < \kappa$ に対し，κ の元の上昇列 $\alpha_\xi, \xi < \lambda$ をつぎのように定義する．

(2.56) $\alpha_0 = \alpha$;

(2.57) $\alpha_{\xi+1} = \min\left(\left(\bigcap_{\eta\le\xi} C_\eta\right) - (\alpha_\xi + 1)\right)$;

(2.58) $\gamma < \lambda$ が極限順序数のときには，$\alpha_\gamma = \sup\{\alpha_\xi : \xi < \gamma\}$.

(2.57) での $\bigcap_{\eta<\xi} C_\eta$ は帰納法の仮定から閉非有界である．また κ は正則基数だから，(2.58) で，$\sup\{\alpha_\xi : \xi < \gamma\} < \kappa$ となる．したがって上の構成は可能であることが分かる．$\beta = \sup\{\alpha_\xi : \xi < \lambda\}$ とすると，κ が正則基数であることから，$\beta < \kappa$ である．また (2.56) により $\alpha < \beta$ である．(2.57) により，すべての $\xi < \lambda$ に対し，$\beta \cap C_\xi$ は β で共終となるから，$\beta \in C_\xi$ である．したがって $\beta \in C$ である． ■

つぎの定理の命題はフォドアの補題と呼ばれる．無限組み合わせ論の議論で非常に頻繁に用いられる定理である．

定理 2.54（フォドアの補題 (Fodor's lemma)） κ を不可算な正則基数として，$S \subseteq \kappa$ を定常とする．$f : S \to \kappa$ が，

(2.59) すべての $\alpha \in S$ に対し，$f(\alpha) < \alpha$

を満たすとき[52)]，κ で定常な $S' \subseteq S$ と $\beta_0 \in \kappa$ で，すべての $\alpha \in S'$ に対し $f(\alpha) = \beta_0$ となるものが存在する．

証明 各 $\beta \in \kappa$ に対し，$X_\beta = \{\alpha \in S : f(\alpha) = \beta\}$ とする．$\beta \in \kappa$ で X_β が定常となるものがあれば，β_0 をこのような β として $S' = X_\beta$ とすればよい．そのようなものが存在しないとすると，すべての $\beta < \kappa$ に対し，κ で閉非有界な C_β で $X_\beta \cap C_\beta = \emptyset$ となるようなものがとれる．ここで，

$$C = \{\alpha \in \kappa : (\forall \beta < \alpha)(\alpha \in C_\beta)\}$$

52) (2.59) を満たすような f は退行的 (regressive) であるという．

とすると，

クレイム 2.54.1 C は κ で閉非有界である．

$\vdash$ この C に対し，(2.51) と (2.52) が成り立つことを示せばよい．

(2.51) の証明：$\alpha < \kappa$ が極限順序数で，$C \cap \alpha$ が α で共終なら，任意の $\beta < \alpha$ に対し $\beta < \beta' < \alpha$ とすると，$\beta' < \alpha' < \alpha$ で $\alpha' \in C$ となるものがとれる．C の定義から，$\alpha' \in C_\beta$ である．このことから，$C_\beta \cap \alpha$ は α で共終となることが分かるから，$C_\beta \cap \alpha$ が閉非有界であることから $\alpha \in C_\beta$ である．$\beta < \alpha$ は任意だったから，C の定義から，$\alpha \in C$ である．

(2.52) の証明：任意の $\alpha < \kappa$ に対し，κ の元の上昇列 $\alpha_n, n \in \omega$ を，帰納的に

(2.60) $\alpha_0 = \alpha;$

(2.61) $\alpha_{n+1} = \min\left(\bigcap_{\beta<\alpha_n} C_\beta - (\alpha_n + 1)\right)$

として定義する．補題 2.53 (4) により，(2.61) での $\bigcap_{\beta<\alpha_n} C_\beta$ は閉非有界となるので，この定義は可能である．$\alpha^* = \sup_{n<\omega} \alpha_n$ とする．(2.60) により $\alpha < \alpha^*$ である．一方 κ は正則で $\kappa > \omega$ だから，$\alpha^* < \kappa$ である．$\beta < \alpha^*$ なら，$n_0 < \omega$ を十分に大きくとると，すべての $n_0 < n < \omega$ に対し，$\beta < \alpha_{n-1}$ となるから，(2.61) により，$\alpha_n \in C_\beta$ である．したがって $C_\beta \cap \alpha^*$ は α^* で共終となるから，C_β が閉非有界により，$\alpha^* \in C_\beta$ である．$\beta < \alpha^*$ は任意だったから，C の定義により $\alpha^* \in C$ である． $\dashv$

ここで S は定常だから，$\alpha_0 \in S \cap C$ がとれるが，$\alpha_0 \in C$ によりすべての $\beta < \alpha_0$ に対し，$\alpha_0 \notin X_\beta$ つまり $f(\alpha_0) \neq \beta$ となる．ところが (2.59) により $f(\alpha_0) < \alpha_0$ だから，これは矛盾である． ■

つぎの補題の証明は，フォドアの補題（定理 2.54）の典型的な応用例の一つとなっている．

補題 2.55 κ を無限基数とするとき，任意の関数 $f : \kappa^{++} \times \kappa^+ \to \kappa$ に対し，$\eta < \xi < \kappa^+$ と定常な $K \subseteq \kappa^{++}$ で，すべての $\alpha, \beta \in K$ に対し

$f(\alpha,\eta)=f(\beta,\xi)$ となるものが存在する[53)].

証明 $f:\kappa^{++}\times\kappa^{+}\to\kappa$ とする．各 $\alpha\in\kappa^{++}$ に対し，$\nu_\alpha\in\kappa$ を

(2.62) $\{\eta<\kappa^{+} : f(\alpha,\eta)=\nu_\alpha\}$ は κ^{+} で共終

となるようにとる[54)].

このとき，フォドアの補題（定理 2.54）により，定常な $K_1\subseteq\kappa^{++}$ と $\nu^*<\kappa$ で，すべての $\alpha\in K_1$ に対し $\nu_\alpha=\nu^*$ となるようなものがとれる[55)].

各 $\alpha\in K_1$ に対し，$\eta_\alpha<\kappa^{+}$ を $f(\alpha,\eta_\alpha)=\nu^*$ となるようにとる．再びフォドアの補題により，定常な $K_2\subseteq K_1$ と $\eta<\kappa^{+}$ で，すべての $\alpha\in K_2$ に対して $\eta_\alpha=\eta$ となるようなものがとれる．

ここで (2.62) により，各 $\alpha\in K_2$ に対し，$\xi_\alpha\in\kappa^{+}-(\eta+1)$ で $f(\alpha,\xi_\alpha)=\nu^*$ となるものがとれる．再度フォドアの補題を用いると，定常な $K\subseteq K_2$ と $\xi<\kappa^{+}$ で，すべての $\alpha\in K$ に対し $\xi_\alpha=\xi$ となるものがとれる．ξ_α, $\alpha\in K_2$ と K のとり方から，$\eta<\xi<\kappa^{+}$ で，すべての $\alpha,\beta\in K$ に対し $f(\alpha,\eta)=f(\beta,\xi)=\nu^*$ となることが分かる．したがって，これらの η,ξ,K が求めるようなものである． ■

以上の準備により，定理 2.52 の証明が行える．

定理 2.52 の証明 まず CH が成り立たない，つまり $|\mathbb{R}|\geq\aleph_2$ と仮定する．このとき，もし (2.50) が成り立つとすると，$\mathbb{R}$ の $\mathbb{Q}$ 上の部分空間 S と $\mathbb{Q}$ 上線形独立な S の部分集合 X_n, $n\in\omega-\{0\}$ で，$|S|=\aleph_2$ かつ $S=\bigcup_{n\in\omega}X_n$ となるようなものがとれる．ただし，$X_0=\{0\}$ とする．

$h:S\to\omega$ を，すべての $x\in S$ に対し，$x\in X_{h(x)}$ となるようにとる．S'' を S の $\mathbb{Q}$ 上の線形部分空間で $|S''|=\aleph_1$ となるものとして，$S=S'\oplus S''$ と直和分解する．このとき $|S'|=\aleph_2$ である．

53) κ^{+} は (2.42) で定義した κ のつぎの基数で，κ^{++} は，この記法での $(\kappa^{+})^{+}$，つまり κ のつぎのつぎの基数のことである．

54) $\{\eta<\kappa^{+} : f(\alpha,\eta)=\nu\}$, $\nu<\kappa$ は κ^{+} の κ 個の部分集合への分割だから，その中の少なくとも一つは濃度 κ^{+} となり，したがって，κ^{+} で共終となる．

55) $\kappa^{++}-\kappa\in\alpha\mapsto\nu_\alpha\in\kappa\subseteq\kappa^{++}$ は退行的となることに注意する．

$f : S' \times S'' \to \omega$ を $f(a,b) = h(a+b)$ となるものとする．このとき，補題 2.55 により，a, $b \in S' - \{0\}$, $a \neq b$ と c, $d \in S''$, $c \neq d$ で $f(a,c) = f(b,d) = f(a,d) = f(b,c)$ となるものがとれる．$f(a,c) = n$ とすると $a+c$, $b+d$, $a+d$, $b+c$ はすべて X_n の元である．a, b, c, d の選び方から $a+c$, $b+d$, $a+d$, $b+c$ はすべて異なる．とくにこのことから $n \neq 0$ である．ところが，

$$(a+c)+(b+d)-(a+d)-(b+c) = 0$$

だから，これは X_n の元が互いに線形独立であることに矛盾である．

つぎに，CH が成り立つと仮定する．このときには，$|\mathbb{R}| = \aleph_1$ だから，$\mathbb{R}$ の $\mathbb{Q}$ 上の基底 B をとると $|B| = \aleph_1$ である．$B = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ と枚挙する．ただし x_α, $\alpha < \omega_1$ は互いに異なるものとする．各 $\beta < \omega_1$ に対し，S_β を $\{x_\alpha : \alpha < \beta\}$ から生成される $\mathbb{R}$ の $\mathbb{Q}$ 上の線形部分空間とする．このとき $S_0 = \{0\}$ で，すべての $\beta < \omega_1$ に対し S_β は可算となり，$\langle S_\beta : \beta < \omega_1 \rangle$ は真の上昇列となることに注意する．$X_\beta = S_{\beta+1} - S_\beta$ とすると，X_β は空でない可算集合になる．したがって，各 X_β を $X_\beta = \{x_{\beta,n} : n < \omega\}$ と枚挙できる．ここで，$n < \omega$ に対し，$Y_n = \{x_{\beta,n} : \beta < \omega_1\}$ とすると，$\mathbb{R} = \bigcup_{n<\omega} Y_n \cup \{0\}$ である．さらに，各 Y_n は線形独立である．$a \in \mathbb{R} - \{0\}$ に対し，$o(a)$ を $\beta < \omega_1$ で $a \in X_\beta$ となるようなものとする[56)]．$n < \omega$ で，Y_n が線形独立でないものがあったとする．このときには，$\ell \in \omega - \{0\}$, $q_k \in \mathbb{Q} - \{0\}$ と $z_k \in Y_n$, $k < \ell$ で $\sum_{k<\ell} q_k z_k = 0$ となるものがとれる．Y_n の定義から，$o(z_0) > o(z_1), \ldots, o(z_{\ell-1})$ となっているとしてよい．このとき，

$$z_0 = -\frac{1}{q_0}\left(\sum_{k \in \ell - \{0\}} q_k z_k\right)$$

となるが，

$$o(z_0) > o\left(-\frac{1}{q_0}\left(\sum_{k \in \ell - \{0\}} q_k z_k\right)\right)$$

だから，これは矛盾である．■

56) X_β の定義から，X_β, $\beta < \omega_1$ は互いに素で，$\bigcup_{\beta<\omega_1} X_\beta = \mathbb{R} - \{0\}$ だから，このようなものは一意に存在する．

第3章
集合論のモデル

本章と次章で集合論の公理や命題の，相対的無矛盾性，独立性の証明法の初歩を概説する．ここでのハイライトは次章で述べることになる，ゲーデルによる一般連続体仮説の ZF 上の相対無矛盾性の証明と，コーエンの強制法による ZF 上の連続体仮説の否定の相対無矛盾性の証明のスケッチである．

本章では，おもに次章の準備として必要となることがらについて述べ，ゲーデルやコーエンの手法を用いずに遂行できる，いくつかの簡単な相対的無矛盾性証明をみる．本章の終わりで，ゲーデルの不完全性定理の応用である，理論の無矛盾性の強さ，という概念を導入するが，これは本書第 II 部で中心的な役割を果たすことになる主要概念の一つである．

3.1 論理式の相対化と絶対性

M をクラスとするとき，$\mathcal{L}_{\in}$ の論理式 φ に対し，φ の M への相対化 (relativization to M) を，$\mathcal{L}_{\in}$ の論理式 φ^M としてつぎのように帰納的に定義する．

(3.1) φ が $x = y$ あるいは $x \in y$ の形をしているときには，φ^M は φ 自身とする；

(3.2) φ が $\psi \wedge \eta$ または，$\psi \vee \eta$ または，$\neg\psi$ の形をしているときには，φ^M

は，それぞれ，$\psi^M \wedge \eta^M$ または，$\psi^M \vee \eta^M$ または，$\neg\psi^M$ とする；

(3.3) φ が，$\exists x\psi$ または $\forall x\psi$ の形をしているときには，φ^M は，それぞれ，$(\exists x \in M)\psi^M$ または，$(\forall x \in M)\psi^M$ とする[1]．

φ^M を $M \models \varphi$ とも書き「φ は M で成り立つ」あるいは，「M は φ を満たす」，とも読み下すことにする．M が集合のときには，$\varphi = \varphi(x_0, \cdots, x_{n-1})$ として，$a_0, \ldots, a_{n-1} \in M$ に対し，$M \models \varphi(a_0, \cdots, a_{n-1})$ はモデル理論の意味での $\langle M, \in \rangle \models \varphi(a_0, \cdots, a_{n-1})$ と一致する．ただし，後で述べる，モデル理論の意味での "$\models$" の集合論における扱いとは異なり，ここでの φ は集合論の外側の「本物の」論理式になっていることに注意する．

$M \models \varphi$ のとき，M は φ のモデル (model) である，ともいうことにする．また $\mathcal{L}_\in$ の公理系 T のすべての公理 φ に対して $M \models \varphi$ が成り立つとき，これを $M \models T$ と表すことにする[2]．公理系 T が矛盾するとは，T からある命題 φ とその否定 $\neg\varphi$ の両方が導けることである．T が矛盾すれば，T からはすべての命題が証明できることになる．T が矛盾しないとき，T は無矛盾であるという．

以下の定理とその証明では，T や ψ は，T（の記述する集合論）の中で「存在」する対象ではなく，「本物」の公理系や論理式であり，したがって，この定理と証明は，そのようなものの一つ一つ（とクラス一つ一つ）に対し成立する命題とその証明のパターンを述べたものとなっている[3]．

つぎの性質は，以降の議論では断わりなくいたるところで用いられる．

補題 3.1 $M \models T$ で $T \vdash \varphi$ なら，$M \models \varphi$ となる．とくに，$M \models \varphi$ で $\vdash \varphi \to \psi$ なら，$M \models \psi$ である．

---

1) M が $\varphi(x, \cdots)$ の定めるクラスのとき，p.47 の脚注 21 でと同様に，$(\exists x \in M)\psi^M$ は $\exists x(\varphi(x, \cdots) \wedge \psi^M)$ のこととする．また，$(\forall x \in M)\psi^M$ は $\forall x(\varphi(x, \cdots) \to \psi^M)$ のこととする．

2) 厳密にいうと，「議論が集合論 T_0 で展開されていて，$T_0 \vdash M \models \varphi$ がすべての T の公理 φ で成り立つとき，$\cdots$」のようにいわなくてはならないが，T_0 が何か文脈から明らかな場合や，そこでの議論が T_0 が何であるかに依存しない場合には，あえて明示しないことにする．

3) このような状況を，たとえば「定理 3.2 は超数学 (metamathematics) における定理である」などと表現することもある．

証明　$M \models T$ で $T \vdash \varphi$ とする．$T \vdash \varphi$ により，T の公理 $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ で $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1} \vdash \varphi$ となるものがとれる．つまり，$\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ からの φ の証明が存在するが，この証明に現れるすべての論理式 ψ を ψ^M で置き換え，（証明の体系に依存する）多少の変更を加えることで，$\varphi_0^M, \ldots, \varphi_{n-1}^M$ からの φ^M の証明が得られる．よって $\varphi_0^M, \ldots, \varphi_{n-1}^M \vdash \varphi^M$ である．一方，仮定により $\varphi_0^M, \ldots, \varphi_{n_1}^M$（がここでベースとしている理論から証明できる）から，φ^M つまり $M \models \varphi$（がここでベースとしている理論から証明できること）が分かる．■

定理 3.2　T を $\mathcal{L}_\in$ の公理系として，ψ を $\mathcal{L}_\in$ の文とする．クラス M で，T に含まれる各公理 φ に対し，$T \vdash \varphi^M$ が証明でき，かつ $T \vdash \psi^M$ となるものがあるとする．このとき，T が無矛盾なら，$T + \psi$（T の公理全体に ψ を新しい公理として付加して得らえる体系）も無矛盾である．

証明　$T + \psi$ が矛盾するとすると，$T + \psi \vdash \neg\psi$ となる．したがって，T の公理 $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ で，$\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}, \psi \vdash \neg\psi$ となるものがとれる．したがって，補題 3.1 の証明でと同様にして，$\neg\psi^M$ の $\varphi_0^M, \ldots, \varphi_{n-1}^M, \psi^M$ からの証明が得られる．したがって，

$$\varphi_0^M, \ldots, \varphi_{n-1}^M, \psi^M \vdash \neg\psi^M$$

である．一方，仮定から，$T \vdash \varphi_0^M, \ldots, \varphi_{n-1}^M, \psi^M$ だから，$T \vdash \neg\psi^M$ となるが，$T \vdash \psi^M$ により，これは T が無矛盾であるという仮定に矛盾する．

■

T の無矛盾性を仮定すると，$T + \psi$ も無矛盾であることが示せるとき，ψ は T 上相対的無矛盾 (relatively consistent) であるという．ψ も $\neg\psi$ も T 上相対的無矛盾のとき，ψ は T 上独立 (independent) であるという．

以下では，定理 3.2 での T としては，主に ZFC または，その拡張，または ZFC のいくつかの部分公理系が考察されることになる．ZFC の部分公理系として考察されるものは，ZF, ZF（または ZFC）から置換公理を除いたもの — これを Z（または ZC）と表す，ZF（または ZFC などなど）から

基礎の公理を除いたもの — これを ZF^-（または ZFC^- などなど）と表す，さらに，ZFC（または，ZFC^- などなど）からベキ集合の公理を除いたもの — これを $\mathrm{ZFC}-\mathrm{P}$（または，$\mathrm{ZFC}^- - \mathrm{P}$ などなど）と表す — などである．T を上のようなものとして M を（T での）クラスとする．$\mathcal{L}_\in$ の論理式 $\varphi(x_0,\cdots,x_{n-1})$ は，すべての $a_0,\ldots,a_{n-1}\in M$ に対し，

$$\varphi(a_0,\cdots,a_{n-1}) \;\leftrightarrow\; \varphi^M(a_0,\cdots,a_{n-1})$$

となることが（T で）示せるとき，（T で M 上）絶対的 (absolute) であるという．

$\mathcal{L}_\in$ 論理式のうち Δ_0 論理式 (Δ_0-formula) と呼ばれるものをつぎのようにして帰納的に定義する．

(3.4)　x, y が変数なら，表現 $x=y$, $x\in y$ は Δ_0 論理式である（以下では簡単のために「集合論の」は略す）；

(3.5)　φ, ψ が Δ_0 論理式なら，$(\varphi\wedge\psi)$, $(\varphi\vee\psi)$, $(\varphi\to\psi)$, $(\varphi\leftrightarrow\psi)$, $\neg\varphi$ も Δ_0 論理式である；

(3.6)　φ が Δ_0 論理式で x, y が変数なら $(\exists x\in y)\varphi$, $(\forall x\in y)\varphi$ は Δ_0 論理式である[4)]；

(3.7)　Δ_0 論理式は (3.4), (3.5), (3.6) のくり返し適用により得られるもののみである．

Δ_0 論理式 φ の前に（束縛されていない）存在量化子をいくつかつけた $\exists x_0\cdots\exists x_{k-1}\varphi$ の形の論理式を Σ_1 論理式 (Σ_1-formula) と呼ぶ．また，Δ_0 論理式 φ の前に（束縛されていない）全称量化子をいくつかつけた $\forall x_0\cdots\forall x_{k-1}\varphi$ の形の論理式を Π_1 論理式 (Π_1-formula) と呼ぶ．

$\mathcal{L}_\in$ 論理式 φ がある Δ_0（または Σ_1 または Π_1）論理式 φ' と論理的に同値となることが示せるとき，つまり，$\vdash\varphi\leftrightarrow\varphi'$ が成り立つとき，φ は Δ_0（または Σ_1 または Π_1）であるということにする．φ が Σ_1 でも Π_1 でもあるとき，φ は Δ_1 であるという．

4)　$(\exists x\in y)\varphi$ と $(\forall x\in y)\varphi$ はそれぞれ，$\exists x(x\in y\wedge\varphi)$ と $\forall x(x\in y\to\varphi)$ の略である．$\exists x\in y$, $\forall x\in y$ の形の量化子は束縛された量化子 (bounded quantifier) と呼ばれる．

さらに，考察している公理系 T のもとで，$\mathcal{L}_\in$ の論理式 φ に対し Δ_0（または Σ_1 または Π_1）論理式 φ' で

$$T \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$$

となるものがとれるとき，φ は Δ_0^T（または Σ_1^T または Π_1^T）論理式である，ということにする．ただし，この場合には，(3.4) で，変数記号 x, y, ... だけでなく，T で導入された定数や関数記号を用いてつくった項 t_0, t_1 に対しても，それらを含む論理式を $\mathcal{L}_\in$ 論理式に翻訳しなおしたものが Δ_0^T になるとき，Δ_0^T であるということにする．たとえば，T が ZFC のとき，$\omega \in x$ や $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = y$ なども Δ_0^T である．

φ が Σ_1^T 論理式かつ Π_1^T 論理式であるとき，φ は Δ_1^T 論理式である，という．

また，ある命題や述語が Δ_0^T（または Σ_1^T または Π_1^T）論理式で表せるとき，その命題や述語は Δ_0^T（または Σ_1^T または Π_1^T）である，という言い方もすることにする．

クラス M が推移的 (transitive) とは，集合の推移性と同様，すべての $y \in M$ と $x \in y$ に対し $x \in M$ となることとする．

補題 3.3 M を推移的なクラスとする．このとき，つぎが成り立つ．

(0) すべての Δ_0 論理式は M 上で絶対的である．

(1) すべての Σ_1 論理式 $\varphi(x_0, \cdots, x_{n-1})$ と $a_0, \ldots, a_{n-1} \in M$ に対し，$\varphi^M(a_0, \cdots, a_{n-1})$ なら，$\varphi(a_0, \cdots, a_{n-1})$ である．

(2) すべての Π_1 論理式 $\varphi(x_0, \cdots, x_{n-1})$ と $a_0, \ldots, a_{n-1} \in M$ に対し，$\varphi(a_0, \cdots, a_{n-1})$ なら，$\varphi^M(a_0, \cdots, a_{n-1})$ である．

証明 (0)：Δ_0 論理式 $\varphi(x_0, \cdots, x_{n-1})$ の構成に関する帰納法により，

(3.8) すべての $a_0, \ldots, a_{n-1} \in M$ に対し，
$\varphi(a_0, \cdots, a_{n-1}) \ \leftrightarrow \ \varphi^M(a_0, \cdots, a_{n-1})$ となる

ことを示せばよい．

φ が $x \in y$ または $x \in y$ の形をしているときには，(3.1) により φ^M は φ と一致するから，(3.8) は自明である．

φ が $(\psi \wedge \eta)$, $(\psi \vee \eta)$, $(\psi \to \eta)$, $(\psi \leftrightarrow \eta)$, $\neg\psi$ のどれかの形をしていて，ψ と η は (3.8) を満たすなら，(3.2) により，φ も (3.8) を満たすことも明らかである．

φ が $(\exists x \in y)\psi(x, y, x_1, \cdots, x_{n-1})$ の形をしていて，ψ は (3.8) を満たすとする．$a_0, \ldots, a_{n-1} \in M$ に対し $\varphi(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$ とすれば，$b \in a_0$ で $\psi(b, a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$ となるものがとれる．M は推移的だから，$b \in M$ である．したがって，ψ の M 上の絶対性の仮定から，$\psi^M(b, a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$ である．よって，

$$(3.9) \quad (\exists x \in M)(x \in a_0 \wedge \psi^M(x, a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}))$$

となるが，これは，$\varphi^M(a_0, \cdots, a_{n-1})$ に他ならない．逆に $\varphi^M(a_0, \cdots, a_{n-1})$ つまり，(3.9) が成り立てば，ψ の M 上の絶対性の仮定から，

$$(3.10) \quad (\exists x \in M)(x \in a_0 \wedge \psi(x, a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}))$$

となる．したがって，とくに $\exists x(x \in a_0 \wedge \psi(x, a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}))$ つまり，$\varphi(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$ である．

φ が $(\forall x \in y)\psi$ の形をしている場合にも，同様に φ の M 上の絶対性を ψ の M 上の絶対性から帰結できる．

(1)：$\varphi(x_0, \cdots, x_{n-1})$ を Σ_1 論理式として，$\varphi(x_0, \cdots, x_{n-1})$ は，ある Δ_0 論理式 $\psi(x_0, \cdots, x_{n-1}, y_0, \cdots, y_{m-1})$ に対し，

$$(3.11) \quad \exists y_0 \cdots \exists y_{m-1}\psi(x_0, \cdots, x_{n-1}, y_0, \cdots, y_{m-1})$$

という形をしているとする．$a_0, \ldots, a_{n-1} \in M$ に対し，$\varphi^M(a_0, \cdots, a_{n-1})$ なら，

$$(3.12) \quad (\exists y_0 \in M) \cdots (\exists y_{m-1} \in M)\psi^M(a_0, \cdots, a_{n-1}, y_0, \cdots, y_{m-1})$$

となる．したがって $b_0, \ldots, b_{m-1} \in M$ で $\psi^M(a_0, \cdots, a_{n-1}, b_0, \cdots, b_{m-1})$ となるものがとれる．ここで (0) により，$\psi(a_0, \cdots, a_{n-1}, b_0, \cdots, b_{m-1})$ となるから，

$$(3.13) \quad \exists y_0 \cdots \exists y_{m-1}\psi(a_0, \cdots, a_{n-1}, y_0, \cdots, y_{m-1})$$

つまり，$\psi(a_0, \cdots, a_{n-1})$ である．

(2)：$\varphi(x_0, \cdots, x_{n-1})$ を Π_1 論理式として，$\varphi(x_0, \cdots, x_{n-1})$ は，ある Δ_0 論理式 $\psi(x_0, \cdots, x_{n-1}, y_0, \cdots, y_{m-1})$ に対し，

$$\forall y_0 \cdots \forall y_{m-1} \psi(x_0, \cdots, x_{n-1}, y_0, \cdots, y_{m-1}) \tag{3.14}$$

という形をしているとする．$a_0, \ldots, a_{n-1} \in M$ に対し，$\varphi(a_0, \cdots, a_{n-1})$ なら，すべての $b_0, \ldots, b_{m-1} \in M$ に対し，$\psi(a_0, \cdots, a_{n-1}, b_0, \cdots, b_{m-1})$ となるから，(0) により，$\psi^M(a_0, \cdots, a_{n-1}, b_0, \cdots, b_{m-1})$ である．したがって，

$$(\forall y_0 \in M) \cdots (\forall y_{m-1} \in M) \psi^M(a_0, \cdots, a_{n-1}, y_0, \cdots, y_{m-1}) \tag{3.15}$$

つまり，$\varphi^M(a_0, \cdots, a_{n-1})$ である．■

補題 3.4 T を任意の $\mathcal{L}_\in$ での理論として，M を推移的なクラスで $M \models T$ となっているとする．このとき，つぎが成り立つ．

(0) すべての Δ_0^T 論理式は M 上で絶対的である．

(1) すべての Σ_1^T 論理式 $\varphi(x_0, \cdots, x_{n-1})$ と $a_0, \ldots, a_{n-1} \in M$ に対し，$\varphi^M(a_0, \cdots, a_{n-1})$ なら，$\varphi(a_0, \cdots, a_{n-1})$ である．

(2) すべての Π_1^T 論理式 $\varphi(x_0, \cdots, x_{n-1})$ と $a_0, \ldots, a_{n-1} \in M$ に対し，$\varphi(a_0, \cdots, a_{n-1})$ なら，$\varphi^M(a_0, \cdots, a_{n-1})$ である．

(3) すべての Δ_1^T 論理式は M 上で絶対的である．

証明 (0), (1), (2) の証明は，それぞれ，補題 3.3 の (0), (1), (2) の証明とまったく同様になりえる[5)]．

(3)：(1) と (2) により明らかである．■

系 3.5 T を ZF^-（の十分に大きな部分）を含む公理系とする．M を推移的なクラスとするとき，つぎが成り立つ．

(0) $M \models$ “外延性公理”．

(1) $\emptyset \in M \Leftrightarrow M \models$ “空集合公理”．

---

5) 補題 3.3 の (0), (1), (2) は，ここでの (0), (1), (2) で $T = \emptyset$ としたものとなっていることに注意する．

(2) すべての $a, b \in M$ に対し，$\{a,b\} \in M \Leftrightarrow M \models$ “対の公理”．

(3) すべての $a \in M$ に対し，$\bigcup a \in M \Leftrightarrow M \models$ “和集合の公理”．

(4) $\omega \in M \Rightarrow M \models$ “無限公理”．

(5) すべての $a \in M$ に対し，$\mathcal{P}(a) \cap M \in M \Leftrightarrow M \models$ “ベキ集合の公理”．

(6) $M \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha \Rightarrow M \models$ “基礎の公理”．

証明 (0)：外延性公理の命題は

$$\forall x \forall y \big(((\forall z \in x)(z \in y) \ \land \ (\forall z \in y)(z \in x)) \ \rightarrow \ x = y\big) \tag{3.16}$$

と Π_1 文として表せる．したがって，(3.16) の論理式を φ とすると，補題 3.3 (2) により，φ^M が成り立つ．つまり，$M \models$ “外延性公理” である．

(1)：“x は空集合である” は

$$(\forall y \in x)(y \notin x) \tag{3.17}$$

と表すことができるから，Δ_0 である．したがって，補題 3.3 (0) により，$\emptyset \in M$ なら $\emptyset$ は M の意味での空集合となっているから，$M \models$ “空集合公理” となる．逆に $M \models$ “空集合公理” なら，空集合公理が M で存在を主張している M の意味での空集合は $\emptyset$ となるから $\emptyset \in M$ である．

(2) と (3)：“$z = \{x, y\}$” と “$y = \bigcap x$” が Δ_0 になることから，(1) の証明と同様に示せる．

(4)：$\varphi(x)$ を

$$\emptyset \in x \ \land \ (\forall y \in x)(y \cup \{y\} \in x) \tag{3.18}$$

とすると，無限公理は $\exists x \varphi(x)$ と表される．(3.18) を $\mathcal{L}_\in$ 論理式に展開すると Δ_0 論理式になるから，$\varphi(\omega)$ により，$\omega \in M$ なら，補題 3.3 (0) から $M \models \varphi(\omega)$ となる．したがって，このときには $M \models$ “無限公理” である．

(5)：$a \in M$ に対し，“$x = \mathcal{P}(a)$” は

$$\forall z (z \in x \ \leftrightarrow \ z \subseteq a) \tag{3.19}$$

と表せるが，“$z \subseteq a$” は Δ_0 だから，補題 3.3 (0) により，(3.19) の M への相対化は，

$$(3.20) \quad (\forall z \in M)(z \in x \ \leftrightarrow \ z \subseteq a)$$

と同値になる．したがって，$M \models$ “$b = \mathcal{P}(a)$” $\Leftrightarrow b = \mathcal{P}(a) \cap M$ となる．したがって，$M \models$ “ベキ集合の公理” なら，すべての $a \in M$ に対し $\mathcal{P}(a) \cap M \in M$ となり，逆に，すべての $a \in M$ に対し $\mathcal{P}(a) \cap M \in M$ なら，$b = \mathcal{P}(a) \cap M$ とすると，$M \models b = \mathcal{P}(a)$ となり，$M \models$ “ベキ集合の公理” が分かる．

(6)：Δ_0 論理式 φ を

$$(3.21) \quad (\exists y \in x)(\forall z \in x)(\neg z \in y)$$

とすると，基礎の公理は，$\forall x \varphi$ と表せる．φ は Δ_0 論理式だから，補題 3.3 (0) により $(\forall x \varphi)^M$ は $(\forall x \in M)\varphi$ と同値である．一方補題 2.25 (2) により，任意の $a \in \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha$ 上で $\in$ は整順的だから，とくに $\varphi(a)$ となることが分かる．したがって，$M \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha$ なら $M \models$ “基礎の公理” である． ■

クラス X が Δ_0^T（Σ_1^T または Π_1^T または Δ_1^T）とは，$X = \{x : \varphi(x, \cdots)\}$ として，$\varphi(x, \cdots)$ が Δ_0^T（Σ_1^T または Π_1^T または Δ_1^T）のこととする．

クラス関数 $F(x)$ が Δ_0^T（Σ_1^T または Π_1^T または Δ_1^T）とは，“$y = F(x)$” が Δ_0^T（Σ_1^T または Π_1^T または Δ_1^T）のこととする．つまりクラス関数 $F(x)$ が Δ_0^T（Σ_1^T または Π_1^T または Δ_1^T）とは，$F(x)$ の「グラフ」が Δ_0^T（Σ_1^T または Π_1^T または Δ_1^T）のことである．

補題 3.6 T を ZF（または ZF の十分に大きな部分を含む $\mathcal{L}_\in$ での公理系）とする．今クラス関数 $G(x)$ が Σ_1^T なら，$F(\alpha) = G(F \restriction \alpha)$ で定義される On 上の関数 F は Δ_1^T となる．

証明 “$y = F(\alpha)$” は，

$$(3.22) \quad \exists f \left(\text{“}f \text{ は } \alpha \text{ 上の関数”} \ \wedge \ \forall \beta < \alpha \ f(\beta) = G(f \restriction \beta) \ \wedge \ y = G(f)\right)$$

と表せるから Σ_1^T である[6]．一方，“$y = F(\alpha)$” は，

$$\text{(3.23)}\quad \forall f\,\big(\text{“}f \text{ は } \alpha+1 \text{ 上の関数”} \wedge \forall\beta \leq \alpha\,(f(\beta) = G(f \restriction \beta)) \\ \to\ y = f(\alpha)\big)$$

とも表すことができるから Π_1^T である． ■

C を On の部分クラスとするとき，C が閉非有界である，というのを集合の閉非有界性と同様に定義する．つまり C が閉非有界とは，

(3.24) すべての極限順序数 $\alpha \in \mathrm{On}$ に対し $C \cap \alpha$ が α で共終なら，$\alpha \in C$ となり；

(3.25) すべての $\alpha \in \mathrm{On}$ に対し $\beta > \alpha$ で $\beta \in C$ となるものが存在する

こととする[7]．

定理 3.7 ZF で議論する．φ を $\mathcal{L}_\in$ 論理式として，$\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ を φ の部分論理式の全体（φ 自身も含む）とする．このとき，順序数のクラス C_φ を

$$C_\varphi = \{\alpha \in \mathrm{On} : \text{すべての } i < n \text{ に対し } \varphi_i \text{ は } V_\alpha \text{ 上で絶対的となる}\}$$

と定義すると．C_φ は閉非有界となる．

とくに，すべての集合 x に対し，推移的な集合 $y \supseteq x$ で，φ が y 上絶対的となるようなものが存在する．

証明 φ の構成に関する帰納法で証明する．φ が $x = y$ または $x \in y$ の形の論理式のときには，$C_\varphi = \mathrm{On}$ となり定理の主張は明らかである．

φ が $\neg\psi$ という形をしていて，ψ に対しては定理の主張が成り立っているときには，$C_\varphi = C_\psi$ となるからよい．

---

6) この式が Σ_1^T であることを示すには，φ が Σ_1^T なら $(\forall x \in y)\varphi$ も Σ_1^T となることが示せればよいが，このためには，AC がなくても，基礎の公理と ZF の他の公理（の一部）があれば十分である．

7) κ の部分集合に関する閉非有界性のときと同様に，(3.24) が成り立つとき，C は閉じているという．また (3.25) が成り立つとき，C は非有界であるという．

φ が $(\psi \wedge \eta)$ という形をしていて，ψ と η に対しては定理の主張が成り立っているときには，$C_\varphi = C_\psi \cap C_\eta$ となるからよい[8]．

φ が，$(\psi \vee \eta)$ または $(\psi \to \eta)$ または $(\psi \leftrightarrow \eta)$ の形をしている場合も同様である．

一番問題となるステップは，φ が $\exists x\psi$ または $\forall x\psi$ という形をしていて，ψ に対しては定理の主張が成り立っているときであるが，ここでは φ が $\exists x\psi$ の場合についてのみ考察することにする．$\forall x\psi$ の場合の証明は同様である．

まず，この場合に C_φ が閉じたクラスになっている，つまり (3.24) を満たすことを示す．$\alpha \in \mathrm{On}$ を極限順序数として，$C_\varphi \cap \alpha$ が α で共終とする．ψ は φ の部分論理式なので，ψ の部分論理式はすべて φ の部分論理式でもある．よって $C_\varphi \subseteq C_\psi$ である．とくに $C_\psi \cap \alpha$ も α で共終である．したがって，帰納法の仮定から C_ψ は閉じていることから，$\alpha \in C_\psi$ となる．よって，φ が V_α 上で絶対的であることを示せば十分である．

$a_1, \ldots, a_n \in V_\alpha$ で $\varphi(a_1, \cdots, a_n)$ なら，仮定から $\alpha' < \alpha$ で，$a_1, \ldots, a_n \in V_{\alpha'}$ かつ $\alpha' \in C_\varphi$ となるものがとれる．$\alpha' \in C_\varphi$ により，$V_{\alpha'} \models \varphi(a_1, \cdots, a_n)$ となるから，$V_{\alpha'} \models \exists x\psi(x, a_1, \cdots, a_n)$ である．したがって，$a_0 \in V_{\alpha'}$ で $V_{\alpha'} \models \psi(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ となるものがある．$\alpha' \in C_\psi$ だから $\psi(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ である．ところが，$\alpha \in C_\psi$ でもあったから，$V_\alpha \models \psi(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ となり，このことから $V_\alpha \models \varphi(a_1, \cdots, a_n)$ が分かる．

逆に $V_\alpha \models \varphi(a_1, \cdots, a_n)$ とすると，$a_0 \in V_\alpha$ で $V_\alpha \models \psi(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ となるものがとれる．$\alpha \in C_\psi$ だったから，$\psi(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ となる．したがって，$\varphi(a_1, \cdots, a_n)$ である．

つぎに C_φ が非有界である，つまり (3.25) が成り立つことを示す．$\alpha \in \mathrm{On}$ を任意にとる．このとき，C_ψ の元の上昇列 α_k, $k \in \omega$ を，

(3.26) $\alpha \leq \alpha_0$;

(3.27) すべての $a_1, \ldots, a_n \in V_{\alpha_k}$ に対し，$\varphi(a_1, \cdots, a_n)$ なら，$a_0 \in V_{\alpha_{k+1}}$ で $\psi(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ となるようなものが存在する

8) 閉非有界なクラスの共通部分が再び閉非有界なクラスになることは，補題 2.53 (1) とまったく同様に示せる．

を満たすようにとる．これは C_ψ が非有界であることから可能である．$\beta = \sup_{n\in\omega} \alpha_n$ とすると，(3.26) から $\alpha \le \beta$ だが，$\beta \in C_\varphi$ となることをつぎで示す．帰納法の仮定により C_ψ は閉じているから，$\beta \in C_\psi$ である．したがって，φ が V_β 上で絶対的であることを示せば十分である．

$a_1, \ldots, a_n \in V_\beta$ に対し，$\varphi(a_1, \cdots, a_n)$ となっているとする．このとき，$a_1, \ldots, a_n \in V_{\alpha_k}$ となる $k \in \omega$ がとれるが，(3.27) により，$a_0 \in V_{\alpha_{k+1}}$ で，$\psi(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ となるものがある．$\beta \in C_\psi$ だから，$V_\beta \models \psi(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ となる．したがって，$V_\beta \models \varphi(a_1, \cdots, a_n)$ である．

逆に，$V_\beta \models \varphi(a_1, \cdots, a_n)$ とすれば，$a_0 \in V_\beta$ で $V_\beta \models \psi(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ となるものがとれるが，$\beta \in C_\psi$ だから，$\psi(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ となる．したがって，$\varphi(a_1, \cdots, a_n)$ である． ■

上の証明では，累積的階層を特徴付ける性質 $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$ はどこにも用いられていない．このことに注意すると，定理 3.7 はつぎのように一般化することができることが分かる．

C をクラスとして，$D \subseteq C$ とする．論理式 $\varphi(x_0, \cdots, x_{n-1})$ に対し，すべての $a_0, \ldots, a_{n-1} \in D$ で $\varphi^C(a_0, \cdots, a_{n-1}) \leftrightarrow \varphi^D(a_0, \cdots, a_{n-1})$ が成り立つとき，$\varphi(x_0, \cdots, x_{n-1})$ は C で D 上絶対的であるということにする．

クラス C に対し，On 上の関数 F で，

(3.28) $\alpha, \beta \in \mathrm{On}$ で $\alpha \le \beta$ なら $F(\alpha) \subseteq F(\beta)$;

(3.29) $\gamma \in \mathrm{On}$ が極限順序数なら $F(\gamma) = \bigcup_{\alpha<\gamma} F(\alpha)$;

(3.30) $C = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} F(\alpha)$

が成り立つものが存在するとき，C は累積的 (cumulative) であるといい，F を C の階層と呼ぶ．

定理 3.8（反映の原理 (reflection principle)[9]） C を累積的なクラスとして，F を C の階層とする．φ を $\mathcal{L}_\in$ 論理式として，$\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ を φ の部分論

9) この定理でのような状況は「反映 (reflection)」または「絶対性 (absoluteness)」として述べられることが多い．「絶対性」が静的なイメージであるのに対し，「反映」は，ここでの「C の φ に関する性質は $F(\alpha), \alpha \in C_\varphi$ に反映される」というように，動的なとらえ方となっていることに注意する．

理式の全体（φ 自身も含む）とする．このとき，順序数のクラス C_φ を

$$C_\varphi = \{\alpha \in \mathrm{On} : \text{すべての}\, i < n \,\text{に対し}\, \varphi_i \,\text{は}\, C \,\text{で}\, F(\alpha) \,\text{上絶対的となる}\,\}$$

と定義すると，C_φ は閉非有界となる．

3.2 比較的簡単な相対的無矛盾性の証明

3.1 節で用意した道具を用いてただちに行うことのできる相対的無矛盾性の証明をいくつかみておくことにする．

V_α, $\alpha \in \mathrm{On}$ を (2.21)–(2.23) で定義された累積的階層とし，

(3.31) $\quad V = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha$

とする．ZF では V は $\{x : x = x\}$ と一致するのだったが，基礎の公理を ZF から除いて得られる体系 ZF^- ではこのことは必ずしも成り立たない．

補題 3.9 ZF^- で議論する．ZF のすべての公理 φ に対し，$V \models \varphi$ となる．

証明 補題 2.24 (1) により V は推移的だから，分出公理と置換公理以外の公理が V で成り立つことは系 3.5 から明らかであるが，ここでは，それらのうち，ベキ集合の公理についての証明をみておくことにする．

$a \in V$ とすると，$a \in V_\alpha$ となる $\alpha \in \mathrm{On}$ がとれる．補題 2.24 (1) により，$a \subseteq V_\alpha$ である．したがって，$\mathcal{P}(a) \subseteq \mathcal{P}(V_\alpha)$ だから，$\mathcal{P}(a) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(V_\alpha))$ である．一方 (2.22) により $\mathcal{P}(\mathcal{P}(V_\alpha)) = V_{\alpha+2} \subseteq V$ だから，$\mathcal{P}(a) \in V$ である．よって，系 3.5 (5) により，$V \models$ “ベキ集合の公理” である．

分出公理については，$\varphi(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ を $\mathcal{L}_\in$ の論理式として，$A, a_1, \ldots, a_n \in V$ とするとき，$\alpha \in \mathrm{On}$ で $A, a_1, \ldots, a_n \in V_\alpha$ となるものがとれるが，補題 2.24 (1) により，$A \subseteq V_\alpha$ だから，(2.22) により

$$\begin{aligned}&\{a \in A : V \models \varphi(a, a_1, \cdots, a_n)\}\\&= \{a \in V_\alpha : a \in A \ \wedge\ V \models \varphi(a, a_1, \cdots, a_n)\} \in \mathcal{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}\end{aligned}$$

となる．したがって，$V \models$ “(分出公理)$_\varphi$” となっていることが分かった．

置換公理については，$\varphi(x, y, x_1, \cdots, x_n)$ を $\mathcal{L}_\in$ の論理式として，$A, a_1, \ldots, a_n \in V$ とし，これらは置換公理での条件を V で満たしているとする．このとき $X = \{b \in V : V \models (\exists a \in A)(\varphi(a, b, a_1, \cdots, a_n))\}$ とすると，X は置換公理により集合だが，$X \subseteq V$ だから，$\alpha \in \mathrm{On}$ で $X \subseteq V_\alpha$ となるものが存在する．したがって，(2.22) により，$X \in V_{\alpha+1} \subseteq V$ である．したがって，$V \models$ “(置換公理)$_\varphi$” である． ■

定理 3.10 ZF$^-$ が無矛盾なら ZF も無矛盾である．

証明 補題 3.9 と定理 3.2 からよい． ■

ZFC$^-$ のもとでは，V は選択公理も満たすことが，補題 3.9 での分出公理の証明と同様に示せる．このことに留意すると，定理 3.10 でと同様に，つぎが示せる．

定理 3.11 ZFC$^-$ が無矛盾なら ZFC も無矛盾である．

補題 3.9 と同様の議論で，以下が示せる．

補題 3.12 Z$^-$(C) で議論する．Z(C) のすべての公理 φ に対し $V_{\omega+\omega} \models \varphi$ が成り立つ[10]．一方，$V_{\omega+\omega}$ では置換公理は成り立たない．

証明 前半の証明は，補題 3.9 と同様に行える[11]．

補題の後半はつぎのように示せる．$\mathbb{N} \ni n \mapsto V_{\omega+n} \in V_{\omega+\omega}$ は $V_{\omega+\omega}$ で定義可能である．つまり，$\mathcal{L}_\in$ の論理式 φ で $n \in \omega$ に対し，

$$b = V_{\omega+n} \quad \Leftrightarrow \quad V_{\omega+\omega} \models n \in \omega \ \wedge \ \varphi(n, b, V_\omega)$$

となるようなものがとれる．とくに $V_{\omega+\omega} \models \forall n \in \omega \exists ! b \ \varphi(n, b, V_\omega)$ となるが，$\{V_{\omega+n} : n \in \omega\}$ は $V_{\omega+\omega}$ の元でない．もしこれが $V_{\omega+\omega}$ の元だとする

10) ただし，以下で見るように，Z$^-$(C) では集合 $V_{\omega+\omega}$ の存在は保証できないので，$V_{\omega+\omega}$ はここではクラス $\bigcup\{V_{\omega+n} : n \in \omega\}$ を表している．

11) $V_{\omega+\omega}$ で無限公理が成り立つことを示すために $\omega \in V_{\omega+\omega}$ が必要となることに注意する．たとえば，$V_{\omega+\omega}$ の代わりに V_ω で同様の議論を行おうとすると，ここのところでうまくゆかなくなる．ちなみに，$V_\omega \models$ “Z$^-$ − 無限公理” である．

と，$V_{\omega+\omega}$ が和の公理を満たすことから $V_{\omega+\omega} = \bigcup\{V_{\omega+n} : n \in \omega\}$ は $V_{\omega+\omega}$ の元となるが，補題 2.25 (2) によりこれは矛盾である． ■

補題 3.12 の後半により，つぎがいえることが分かる．

定理 3.13 (1) Z が無矛盾だとすると，ZF は Z から導くことはできない．

(2) ZC が無矛盾だとすると，ZFC は ZC から導くことはできない．

証明 (1)：ZF が矛盾するなら，主張は自明である．もし ZF が無矛盾で ZF のすべての公理が Z から導けるとすれば，$V_{\omega+\omega}$ で ZF のすべての公理が成り立たなくてはならないが，これは補題 3.12 の後半に矛盾する．

(2)：ZFC と ZC の間でも補題 3.12 と同様な命題は成り立つから，(1) と同様の議論で示せる． ■

$V_{\omega+\omega}$ を用いると，ZF(C) の定理のうちのいくつかについて，それらが Z(C) からでは証明できないことを示すことができる．たとえば，集合 $\{V_{\omega+n} : n \in \omega\}$ の存在がそうである．もし Z(C) でこの集合の存在が証明できるとすれば，和集合の公理から，$V_{\omega+\omega}$ も存在することになるが，このことから，補題 3.12 により $V_{\omega+\omega} \in V_{\omega+\omega}$ がいえてしまい矛盾である．

モストウスキの定理（定理 2.17, 定理 2.29）も Z(C) では示せない．

$<$ を $\mathcal{P}(\omega)$ 上の任意の整列順序とすると，$\langle \mathcal{P}(\omega), < \rangle \in V_{\omega+\omega}$ だが，補題 2.24 (3) により $V_{\omega+\omega} \cap \mathrm{On} = \omega + \omega$ により，$otp(\langle \mathcal{P}(\omega), < \rangle) \notin V_{\omega+\omega}$ となるからである．したがって，$V_{\omega+\omega} \not\models$ “モストウスキの定理” が分かるが，$V_{\omega+\omega} \models \mathrm{Z(C)}$ だから，モストウスキの定理は Z(C) では証明できないことが結論できる．

基数 κ が到達不可能基数 (inaccessible cardinal) であるとは，

(3.32) κ が正則な極限基数で；

(3.33) すべての $\lambda < \kappa$ に対し $2^\lambda < \kappa$ となる

こととする．以下は ZFC で議論する．

定理 3.14　到達不可能基数 κ に対して，つぎが成り立つ．

(1)　すべての $\alpha < \kappa$ に対し，$|V_\alpha| < \kappa$ となる．したがって，$|V_\kappa| = \kappa$ である．

(2)　任意の $x \subseteq V_\kappa$ に対し，$x \in V_\kappa \Leftrightarrow |x| < \kappa$ である．

(3)　$V_\kappa \models \mathrm{ZFC}$ となる．

(4)　κ を最小の到達不可能基数とするとき，$V_\kappa \models$ “到達不可能基数は存在しない” が成り立つ．

証明　(1)：命題の前半は $\alpha < \kappa$ に関する帰納法により示せる．(2.23) により，このことから $|V_\kappa| \leq \kappa$ が分かるが，補題 2.24 (3) により $|V_\kappa| \geq \kappa$ だから，$|V_\kappa| = \kappa$ である．

(2)：$x \in V_\kappa$ なら，(2.23) により，$\alpha < \kappa$ で $x \in V_\alpha$ となるものがとれる．したがって，補題 2.24 (1) により，$x \subseteq V_\alpha$ である．したがって，(1) により，$|x| \leq |V_\alpha| < \kappa$ である．逆に $|x| < \kappa$ なら，κ は正則な極限順序数だから，(2.23) により，$\alpha < \kappa$ で，$x \subseteq V_\alpha$ となるものがとれるが，(2.22) と補題 2.24 (2) により，$x \in V_{\alpha+1} \subseteq V_\kappa$ である．

(3)：V_κ が置換公理以外の ZFC の公理を満たすことは，補題 3.9 でと同様に示せる．置換公理については，$x, a \in V_\kappa$ に対し，$V_\kappa \models (\forall y \in x)\exists! z\, \varphi(y, z, a)$ とする．$x \in V_\kappa$ と (2) により $|x| < \kappa$ である．したがって，$u = \{x \in V_\kappa : V_\kappa \models (\exists y \in x)\varphi(y, z, a)\}$ とすると，$u \subseteq V_\kappa$ で $|u| < \kappa$ となるから，再び (2) により，$u \in V_\kappa$ が分かる．

(4)：“x は到達不可能基数” は V_κ で絶対的となることが容易に示せる．したがって，κ の最小性により κ より小さな到達不可能基数は存在しないから，$V_\kappa \models$ “到達不可能基数は存在しない” である．■

定理 3.13 の証明でと同様に議論すると，定理 3.14 (4) からつぎが導ける．

定理 3.15　ZFC が無矛盾なら，ZFC から “到達不可能基数が存在する” を導くことはできない．

3.3 集合論の内部での論理とモデル理論

1.2 節での $\mathcal{L}_\in$ や (1.13)–(1.16) による $\mathcal{L}_\in$ 論理式の定義は，集合論の外側で行われており，たとえば，そこでの $\mathcal{L}_\in$ 論理式や証明は，「本物の」（紙の上に書かれたものとして考えられるような）論理式や証明であった．しかし，$\mathcal{L}_\in$ や (1.13)–(1.16) による $\mathcal{L}_\in$ 論理式の定義，また証明の概念などなどは集合論の中で集合や集合上の述語として同様のやり方で導入することができる．集合論の中での集合論の言語も $\mathcal{L}_\in$ と呼ぶことにして，$\mathcal{L}_\in$ 論理式の全体の集合を $\mathrm{Fml}_{\mathcal{L}_\in}$ と表し，$\mathcal{L}_\in$ 文の全体を $\mathrm{ClFml}_{\mathcal{L}_\in}$ と表すことにする．φ を集合論の外側での「本物」の論理式とするとき，φ に対応する集合としての $\varphi \in \mathrm{Fml}_{\mathcal{L}_\in}$ が存在するが，この逆は必ずしも成り立たないし，そもそも，この逆を考えること自体が意味をなさない．たとえば，$(\exists\varphi \in \mathrm{Fml}_{\mathcal{L}_\in})(\cdots)$ という形の論理式が ZFC で証明されたとき，この論理式で存在の主張された論理式 φ を，対応する「本物の」論理式 φ が具体的に構成できるとは限らないからである．

ZFC に対応する $\mathrm{ClFml}_{\mathcal{L}_\in}$ の部分集合を $\mathtt{ZFC}$ と表すことにする．この場合にも，具体的に与えられた論理式 φ が ZFC の公理なら，対応する集合としての論理式 φ は $\mathtt{ZFC}$ の元であるし，φ が ZFC の公理でなければ，対応する集合 φ は $\mathtt{ZFC}$ の元でない．証明，証明可能などの概念も集合論の述語として自然に翻訳できる．たとえば，“$\mathrm{ZFC} \vdash \varphi$” は集合論の内部のオブジェクトに関する述語としての翻訳は

$$\left(\exists p \in (\mathrm{Fml}_{\mathcal{L}_\in})^{<\omega}\right)\ (\mathrm{Bew}(\mathtt{ZFC}, p)\ \wedge\ p(\ell(p) - 1) = \varphi)$$

と表せる．ここに $\mathtt{T} \in \mathcal{P}(\mathrm{ClFml}_{\mathcal{L}_\in})$ と $p \in (\mathrm{Fml}_{\mathcal{L}_\in})^{<\omega}$ に対し，$\mathrm{Bew}(\mathtt{T}, p)$ は

> $p = \langle \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1} \rangle$ として，$\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ は (1.20) の意味で $\mathtt{T}$ からの証明である

ということを表明する $\mathcal{L}_\in$ 論理式とする[12]．

12) “Bew” はドイツ語の Beweis（証明）という単語に由来する．

$\mathtt{T} \in \mathcal{P}(\mathrm{ClFml}_{\mathcal{L}_\in})$ に対し，T が無矛盾な公理系となっていることを表明する述語 Con(T) も

(3.34)　$\neg(\exists\varphi \in \mathrm{Fml}_{\mathcal{L}_\in})\ (\mathtt{T} \vdash \varphi \ \wedge\ \mathtt{T} \vdash \neg\varphi)$

のこととして導入できる．T を上記のような論理学が内部で展開できるだけの表現力をもつ $\mathcal{L}_\in$ での（具体的に与えられた）理論として，T を T に対応する（T の理論の内部での）集合としての公理系とする[13]．このときゲーデルの第二不完全性定理により，

(3.35)　T が無矛盾なら，$T \nvdash \mathrm{Con}(\mathtt{T})$ である．

以下では煩雑さをさけるために，とくに違いを強調することが必要な場合を除いて，公理系 T とそれに対応する ZFC の記号の導入により拡張された言語での項 T の，記号上での区別をせずに，両方とも "T" で表すことにする．ZFC と ZFC などについても同様である．

モデル理論は，集合論の内部で展開されているものと考えられる[14]．ここでは，モデル理論での基礎的な事項のうち $\mathcal{L}_\in$ 構造の場合について，第 4 章で必要になるものについてみておくことにする．

集合 X と X 上の 2 項関係 E の組 $\langle X, E\rangle$ を $\mathcal{L}_\in$ 構造 ($\mathcal{L}_\in$-structure) と呼ぶ．E が $\in$ の X の制限と一致するときには，単に X と書いて $\langle X, \in\cap X^2\rangle$ を表すことにする — このような構造を $\langle X, \in\rangle$ と表すこともある．

$\mathcal{L}_\in$ 構造 $\langle X, E\rangle$ が与えられたとき，$\varphi(x_0, \cdots, x_{n-1}) \in \mathrm{Fml}_{\mathcal{L}_\in}$ と $a_0, \ldots, a_{n-1} \in X$ に対し，$\langle X, E\rangle$ で $\varphi(a_0, \cdots, a_{n-1})$ が成り立つことを表す関係 "$\langle X, E\rangle \models \varphi(a_0, \cdots, a_{n-1})$" をつぎのようにして φ の構成に関する帰納法により定義する．

(3.36)　$\langle X, E\rangle \models a = b \ \Leftrightarrow\ a = b$；

13)　つまり，T は記号の導入によって拡張された $\mathcal{L}_\in$ での定数項（あるいはパラメタを含んだ項）である．

14)　これに対し，1 階の論理の完全性の証明など，数学の基礎に関連した局面でのモデル理論的考察は，できるだけ弱い体系の中で行われる必要がある．完全性定理（の実効的なヴァージョン）は RCA_0 と呼ばれる初等的な算術の体系上 WKL_0 と呼ばれる弱い 2 階算術の体系と同値になることが知られている（たとえば [田中 (一) 1990], [田中（一）1997] または本シリーズ第 3 巻第 II 部を参照）．

(3.37) $\langle X,E\rangle \models a\in b \;\Leftrightarrow\; aEb$；

(3.38) $\langle X,E\rangle \models \psi\wedge\eta \;\Leftrightarrow\; \langle X,E\rangle \models \psi$ かつ $\langle X,E\rangle \models \eta$；

(3.39) $\langle X,E\rangle \models \psi\vee\eta \;\Leftrightarrow\; \langle X,E\rangle \models \psi$ または $\langle X,E\rangle \models \eta$；

(3.40) $\langle X,E\rangle \models \psi\to\eta \;\Leftrightarrow\; \langle X,E\rangle \models \psi$ ならば $\langle X,E\rangle \models \eta$；

(3.41) $\langle X,E\rangle \models \psi\leftrightarrow\eta \;\Leftrightarrow\; \langle X,E\rangle \models \psi$ は $\langle X,E\rangle \models \eta$ と同値；

(3.42) $\langle X,E\rangle \models \neg\psi \;\Leftrightarrow\; \langle X,E\rangle \models \psi$ でない；

(3.43) $\langle X,E\rangle \models \exists x\psi(x,a_0,\cdots) \;\Leftrightarrow\; a\in X$ で $\langle X,E\rangle \models \psi(a,a_0,\cdots)$ となるものが存在する；

(3.44) $\langle X,E\rangle \models \forall x\psi(x,a_0,\cdots) \;\Leftrightarrow\;$ すべての $a\in X$ に対し $\langle X,E\rangle \models \psi(a,a_0,\cdots)$ が成り立つ．

$T\subseteq \mathrm{Fml}_{\mathcal{L}_\in}$ に対し，

(3.45) $\langle X,E\rangle \models T \;\Leftrightarrow\; \forall\varphi\in T\langle X,E\rangle \models \varphi$

とする．$\langle X,E\rangle \models T$ のとき，$\langle X,E\rangle$ は T のモデルである，ともいう．

集合論の外の「本物の」$\mathcal{L}_\in$ 論理式 $\varphi(x_0,\cdots,x_{n-1})$ に対しては，

$$(\forall x_0,\ldots,x_{n-1}\in M)\Big(\varphi(x_0,\cdots,x_{n-1})^M \;\leftrightarrow\; M\models\varphi(x_0,\cdots,x_{n-1})\Big)$$

となることが φ の構成に関する（集合論の外での）帰納法により示せる．ただし，上の式での “$M\models\varphi(x_0,\cdots,x_{n-1})$” は 3.1 節での $\varphi^M(x_0,\cdots,x_{n-1})$ の略記としての記法ではなく，(3.36)–(3.44) で規定された意味でのものである．

$S\subseteq X$ が $\langle X,E\rangle$ で定義可能 (definable) であるとは，$\varphi(x_0,\cdots,x_{n-1})\in \mathrm{Fml}_{\mathcal{L}_\in}$ と $a_1,\ldots,a_{n-1}\in X$ で $S=\{a\in X:\langle X,E\rangle\models\varphi(a,a_1,\cdots,a_{n-1})\}$ となるものが存在することとする．

$$\mathrm{Def}(\langle X,E\rangle)=\{S\in\mathcal{P}(X)\,:\,S \text{ は } \langle X,E\rangle \text{ で定義可能 }\}$$

とする．前と同様に，E が $\in\cap X^2$ のときには，$\mathrm{Def}(\langle X,E\rangle)$ と書くかわりに $\mathrm{Def}(X)$ と書くことにする．

$\mathcal{L}_\in$ 構造 $\langle X, E\rangle$ と $\langle X', E'\rangle$ に対し，$\langle X', E'\rangle$ が $\langle X, E\rangle$ の初等部分構造 (elementary substructure) であるとは，$X' \subseteq X$ で，すべての $\varphi(x_0, \cdots, x_{n-1}) \in \mathrm{Fml}_{\mathcal{L}_\in}$ と $a_0, \ldots, a_{n-1} \in X'$ に対し，

$$\langle X', E'\rangle \models \varphi(a_0, \cdots, a_{n-1}) \quad \leftrightarrow \quad \langle X, E\rangle \models \varphi(a_0, \cdots, a_{n-1})$$

が成り立つことである．$\langle X', E'\rangle$ が $\langle X, E\rangle$ の初等部分構造のとき，これを $\langle X', E'\rangle \prec \langle X, E\rangle$ と表す．初等部分構造の定義から $\langle X', E'\rangle \prec \langle X, E\rangle$ なら $E' = E \cap X'^2$ である．$E = \in \cap X^2$ なら，$\langle X', E'\rangle \prec \langle X, E\rangle$ を $X' \prec X$ と略記する．

$\langle X, E\rangle$ と $\langle Y, F\rangle$ を $\mathcal{L}_\in$ 構造とする．すべての $\varphi \in \mathrm{ClFml}_{\mathcal{L}_\in}$ に対し $\langle X, E\rangle \models \varphi \Leftrightarrow \langle Y, F\rangle \models \varphi$ が成り立つとき，$\langle X, E\rangle$ と $\langle Y, F\rangle$ は初等同値 (elementary equivalent) であるといい，これを $\langle X, E\rangle \equiv \langle Y, F\rangle$ で表す．$\langle X, E\rangle \prec \langle Y, F\rangle$ なら $\langle X, E\rangle \equiv \langle Y, F\rangle$ だが，逆は必ずしも成り立たない．初等同値性についても，E と F がそれぞれ $\in \cap X^2$ と $\in \cap Y^2$ に一致する場合には，2 項関係を省略して $X \equiv Y$ とも表すことにする．

つぎはレーヴェンハイム・スコーレムの定理 (Löwenheim-Skolem theorem) を $\mathcal{L}_\in$ 構造に限定したヴァージョンである．

定理 3.16（レーヴェンハイム・スコーレムの定理） ZFC で議論する．X を無限集合として E を X 上の 2 項関係とする．このとき任意の無限集合 $A \subseteq X$ に対し，$\langle X', E'\rangle \prec \langle X, E\rangle$ で，$A \subseteq X'$ かつ $|X'| = |A|$ となるものが存在する．

定理 3.16 は，定理 3.7 の証明と類似のアイデアによって示せる．子細については本シリーズ第 2 巻を参照されたい．

つぎの定理は，集合論での議論で $\mathcal{L}_\in$ 構造 $\langle X, E\rangle$ を考察する必要のある局面で，E が $\in$ の X への制限になっているような構造のみを扱うことにしても，そのことがそれほど大きな制約とならないことを示唆している．

定理 3.17 T を ZFC の有限個の公理の集まりとするとき[15)]，可算で推移的

15) 証明の文脈からも分かるように，ここでの「有限個の公理の集まり」は公理系の外での「本物の」有限個の公理の集まりである．

な集合 M で $M \models T$ となるものが存在する．

証明　T は $\mathcal{L}_\in$ 文 $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ からなるとする．必要なら T を拡張して外延性公理が T に含まれているとしてよいから，たとえば φ_0 がそれであるとする．φ^* を $\varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_{n-1}$ とする．このとき定理 3.7 により，$\alpha \in \mathrm{On}$ で φ^* が V_α 上で絶対的になるものが存在する．とくに $V_\alpha \models \varphi^*$ である．レーヴェンハイム・スコーレムの定理（定理 3.16）により，可算な V_α の初等的部分構造 $N \prec V_\alpha$ が存在する．$N \models \varphi^*$ だから，とくに $N \models \varphi_0$ である．したがって N は外延的である．よって，N のモストウスキ崩壊 $\pi : \langle N, \in \rangle \xrightarrow{\cong} \langle M, \in \rangle$ がとれる．モストウスキ崩壊の定義から M は推移的であるが，さらに，$\langle M, \in \rangle$ は $\langle N, \in \rangle$ と同型だから，M は可算で，$M \models \varphi^*$, つまり $M \models T$ となる．
■

T と T' を（具体的に与えられた）$\mathcal{L}_\in$ での理論で，すべての T の公理 φ に対し，$T' \vdash \varphi$ が成り立つとする．$\mathtt{T}$ を T の（T' を公理系とする）集合論の内部への翻訳とする．このとき

(3.46)　$T' \vdash \mathrm{Con}(\mathtt{T})$

が成り立つなら，(3.35) により，T' は T より真に強い公理系となっているが，このようなとき，T' は T より無矛盾性の強さ (consistency strength) が大きいという[16]．

補題 3.18　T と T' および $\mathtt{T}$ を上のようにとるとき，$T' \vdash \exists M \exists E\ (\langle M, E \rangle \models \mathtt{T})$ なら，$T' \vdash \mathrm{Con}(\mathtt{T})$ となる．つまりこのときには T' は T より無矛盾性の強さの大きな理論である．

とくに，T が無矛盾なら，$T \nvdash \exists M \exists E\ (\langle M, E \rangle \models \mathtt{T})$ である．

証明　T の中で議論する[17]．M を $\mathtt{T}$ のモデルとすると，

16)　意味の上からは「矛盾性の強さ」といった方がいいのかもしれないが，この用語は定着しているし，T' として矛盾する公理系をとることが本来の意味ではないので，その意味では「矛盾性の強さ」とすると誤解を生じる可能性のある用語になってしまうかもしれない．

17)　「T の中で」というのは歯切れの悪い表現だが，これは，「ZFC の中で」という表現の一般化で，要するに，形式的には「T から $\vdash$ の意味で形式的に証明される命題たちの描く世界で」というような意味である．

$$\{\varphi \in \mathrm{Fml}_{\mathcal{L}_\in} : \mathtt{T} \vdash \varphi\} \subseteq \{\varphi \in \mathrm{Fml}_{\mathcal{L}_\in} : M \models \varphi\} \neq \mathrm{Fml}_{\mathcal{L}_\in}$$

となるから Con($\mathtt{T}$) が分かる.

後半の命題は，このことと (3.35) によりよい. ■

定理 3.19 (0) Z は 2 階の算術より無矛盾性の強さが大きい[18].

(1) ZF は Z より無矛盾性の強さが大きい.

(2) ZFC は ZC より無矛盾性の強さが大きい.

(3) ZFC+$\exists\kappa$(κ は到達不可能基数) は ZFC より無矛盾性の強さが大きい.

証明 (0)：Z で $\langle\omega, \mathcal{P}(\omega), \ldots\rangle$ は 2 階の算術のモデルになっているから，補題 3.18（を対応する言語に対して記述しなおしたもの）によりよい.

(1)：$V_{\omega+\omega}$ は集合であることに注意して，補題 3.12 の証明と同じ議論を ZF^- の中で行うことにより，$V_{\omega+\omega} \models \mathtt{Z}$ が証明できる. ここに $\mathtt{Z}$ は，Z に対応する ZF^- の中での $\mathrm{Fml}_{\mathcal{L}_\in}$ の部分集合である. したがって，補題 3.18 によりよい.

(2)：(1) と同様の議論を ZFC^- の中で行うと $V_{\omega+\omega} \models \mathtt{ZC}$ が示せるから，補題 3.18 によりよい.

(3)：ZFC + $\exists\kappa$(κ は到達不可能基数) の中で議論すると，定理 3.14 の議論を行うことにより，κ を到達不可能基数として，$V_\kappa \models \mathtt{ZFC}$ が示せる. したがって，補題 3.18 によりよい. ■

---

18) 2 階の算術についてはたとえば，[田中 (一) 1990], [田中（一）1997], 本シリーズ第 3 巻第 II 部などを参照されたい.

第4章
構成的集合と強制法

本章では，ゲーデルによる選択公理と一般連続体仮説の ZF 上の無矛盾性の結果（定理 4.9）と，コーエンによるこれらの命題の ZF 上の独立性の結果（定理 4.17，定理 4.18，定理 4.19）の証明を与える．4.1 節では，ゲーデルの結果の証明のために必要となる構成的集合の理論の基礎的な部分を導入し，4.2 節でコーエンの証明 [Cohen 1963; 1964] で用いられたテクニックの発展継承である強制法の現代的な理論のスケッチを与える．

4.1　構成的集合

以下この節では ZF を含む公理系 T の中で議論する．実は議論の道筋を入念に選ぶと，「ZF^- を含む公理系 T」と条件を弱めることもできる．T は ZF であったり ZFC であったり，あるいは，ZFC の何らかの拡張であったりし得る．構成的集合 (constructible set)[1)]の全体のクラス L を，つぎのようにして帰納的に定義される L_α, $\alpha \in \mathrm{On}$ を用いて，$L = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} L_\alpha$ として定義する．

1)「構成的集合」でなく「構成可能集合」という訳語があてられることもあるが，ここでの構成可能性は，順序数の全体 On 上での超限帰納法を仮定した上での括弧つきの「構成可能性」なので，これを「構成可能集合」と言いきってしまうと誤解を生じやすいような気がする．

(4.1)　$L_0 = \emptyset$;

(4.2)　$L_{\alpha+1} = \mathrm{Def}(L_\alpha)$;

(4.3)　γ が極限順序数のとき，$L_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} L_\alpha$.

補題 4.1　上で定義された L_α について，つぎが成り立つ．

(0) すべての $\alpha \in \mathrm{On}$ に対し，L_α は推移的である．したがって，L も推移的である．

(1) $\alpha, \beta \in \mathrm{On}$ で $\alpha \leq \beta$ なら，$L_\alpha \subseteq L_\beta$ となる．

(2) すべての $\alpha \in \mathrm{On}$ に対し，$L_\alpha \subseteq V_\alpha$ である．

(3) すべての $\alpha \in \mathrm{On}$ に対し，$\mathrm{On} \cap L_\alpha = \alpha$ となる．

(4) クラス関数 $\alpha \mapsto L_\alpha$ は Δ_1^{ZF} である．

証明　(0)：$\alpha \in \mathrm{On}$ に関する帰納法で示す．$\alpha = 0$ に対しては，(4.1) によりよい．L_α が推移的として，$x \in L_{\alpha+1}$ で $y \in x$ とすると，(4.2) により，$x \subseteq L_\alpha$ だから $y \in L_\alpha$ となる．したがって，帰納法の仮定から $y \subseteq L_\alpha$ だから，

$$y = \{z \in L_\alpha : z \in y\} = \{z \in L_\alpha : L_\alpha \models z \in y\}$$

と表せる．したがって，$y \in \mathrm{Def}(L_\alpha)$ となるが (4.2) により $\mathrm{Def}(L_\alpha) = L_{\alpha+1}$ である．したがって，$L_{\alpha+1}$ も推移的であることが分かる．γ が極限順序数で $L_\alpha, \alpha < \gamma$ がすべて推移的なら，$\bigcup_{\alpha<\gamma} L_\alpha$ も推移的となるが，(4.3) により $L_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} L_\alpha$ である．

(1)：$\beta \in \mathrm{On}$ に関する帰納法で

(4.4)　すべての $\alpha < \beta$ に対し，$L_\alpha \subseteq L_\beta$

を示す．$\beta = 0$ なら (4.4) は明らかである．β に対し (4.4) が成り立つとして，$\beta + 1$ に対しても成り立つことを示す．このためには $L_\beta \subseteq L_{\beta+1}$ が示せれば十分である．$x \in L_\beta$ とすると，(0) により $x \subseteq L_\beta$ だから，

$$x = \{z \in L_\beta : z \in x\} = \{z \in L_\beta : L_\beta \models z \in x\}$$

となり，$x \in \mathrm{Def}(L_\beta) = L_{\beta+1}$ が分かる．したがって，$L_\beta \subseteq L_{\beta+1}$ である．γ が極限順序数で，すべての $\beta < \gamma$ に対して (4.4) が成り立てば，(4.3) により，γ に対しても (4.4) が成り立つことは明らかである．

(2)：$\alpha \in \mathrm{On}$ に関する帰納法で示す．$\alpha = 0$ のときには，(4.1) により明らかである．$\alpha \in \mathrm{On}$ に対し $L_\alpha \subseteq V_\alpha$ が成り立てば，(4.2) により

$$L_{\alpha+1} = \mathrm{Def}(L_\alpha) \subseteq \mathcal{P}(L_\alpha) \subseteq \mathcal{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$$

である．

$\gamma \in \mathrm{On}$ が極限順序数ですべての $\alpha < \gamma$ に対し $L_\alpha \subseteq V_\alpha$ なら，(4.3) により，$L_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} L_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha<\gamma} V_\alpha = V_\gamma$ が成り立つ．

(3)：$\alpha \in \mathrm{On}$ に関する帰納法で示す．$\alpha = 0$ のときには，(4.1) により明らかである．α に対し $\mathrm{On} \cap L_\alpha = \alpha$ が成り立つとすれば，(1) により，$\alpha = \mathrm{On} \cap L_\alpha \subseteq \mathrm{On} \cap L_{\alpha+1} = \mathrm{On} \cap \mathrm{Def}(L_\alpha) \subseteq \alpha + 1$ だが，(0) と補題 3.3 (0) により，

$$\alpha = \{x \in L_\alpha : L_\alpha \models \text{“}x \text{ は推移的で } \in \text{ は } x \text{ 上の全順序となる”}\}$$

である．したがって，$\alpha \in \mathrm{Def}(L_\alpha)$ となり $\mathrm{On} \cap L_{\alpha+1} = \alpha + 1$ が分かる．γ が極限順序数で $\alpha < \gamma$ に対し $\mathrm{On} \cap L_\alpha = \alpha$ が成り立てば，(4.3) により，

$$\mathrm{On} \cap L_\gamma = \mathrm{On} \cap (\bigcup_{\alpha<\gamma} L_\alpha) = \bigcup_{\alpha<\gamma} (\mathrm{On} \cap L_\alpha) = \bigcup_{\alpha<\gamma} \alpha = \gamma$$

となる．

(4)：$\mathrm{Def}(x)$ は Σ_1^{ZF} だから，補題 3.6 によりよい． ■

定理 4.2 すべての ZF の公理 φ に対し $L \models \varphi$ が成り立つ．

証明 補題 4.1 (0) により L は推移的だから，系 3.5 が L に適用できる．また，補題 4.1 (1) と (4.3) により，L は累積的で，$\alpha \mapsto L_\alpha$ は L の階層になっているから，反映の原理（定理 3.8）が適用できることにも注意する．

外延性公理：系 3.5 (0) により，$L \models$ “外延性公理” である．

空集合公理：$\emptyset \in L_1 \subseteq L$ だから，系 3.5 (1) により，$L \models$ "空集合公理" である．

対の公理：$a, b \in L$ とすると，$a, b \in L_\alpha$ となる $\alpha \in \mathrm{On}$ がとれるが，$\{a,b\} = \{x \in L_\alpha : L_\alpha \models x = a \vee x = b\}$ だから，$\{a,b\} \in \mathrm{Def}(L_\alpha) = L_{\alpha+1} \subseteq L$ である．したがって，系 3.5 (2) により，$L \models$ "対の公理" である．

和集合の公理：$a \in L$ に対し，$a \in L_\alpha$ となる $\alpha \in \mathrm{On}$ をとると，補題 4.1 (0) により，$a \subseteq L_\alpha$ である．したがって，再び補題 4.1 (0) により，すべての $b \in a$ に対し，$b \in L_\alpha$ となるから $b \subseteq L_\alpha$ である．よって，$\bigcup a \subseteq L_\alpha$ となるから，$\bigcup a = \{c \in L_\alpha : L_\alpha \models (\exists x \in a)(c \in x)\}$ により，$\bigcup a \in \mathrm{Def}(L_\alpha) = L_{\alpha+1} \subseteq L$ である．したがって，系 3.5 (3) により，$L \models$ "和集合の公理" が分かる．

分出公理：$\varphi(x, x_1, \cdots, x_n)$ を $\mathcal{L}_\in$ の論理式として $a, a_1, \ldots, a_n \in L$ とする．$b = \{z \in a \cap L : L \models \varphi(z, a_1, \cdots, a_n)\}$ が L の元となることを示せばよい．$a \subseteq L$ だから，

$$b = \{z \in a : L \models \varphi(z, a_1, \cdots, a_n)\}$$

である．定理 3.8 により，$\alpha \in L$ で，$a, a_1, \ldots, a_n \in L_\alpha$ かつ $\varphi(x, x_1, \cdots, x_n)$ は L で L_α 上絶対的になるようなものがとれる．このとき，

$$b = \{z \in L_\alpha : L_\alpha \models z \in a \ \wedge \ \varphi(z, a_1, \cdots, a_n)\}$$

だから，$b \in \mathrm{Def}(L_\alpha) = L_{\alpha+1} \subseteq L$ である．したがって，$L \models$ "(分出公理)$_\varphi$" が分かる．

無限公理：補題 4.1 (3) により $\omega + 1 = \mathrm{On} \cap L_{\omega+1}$ だから，$\omega \in L_{\omega+1} \subseteq L$ である．したがって，系 3.5 (4) により $L \models$ "無限公理" が成り立つ．

ベキ集合の公理：$a \in L$ とすると $\mathcal{P}(a)$ は集合だから $\alpha \in \mathrm{On}$ で $a \in L_\alpha$ かつ $\mathcal{P}(a) \cap L = \mathcal{P}(a) \cap L_\alpha$ となるものがとれる．このとき，

$$\mathcal{P}(a) \cap L_\alpha = \{y \in L_\alpha : y \subseteq a\} = \{y \in L_\alpha : L_\alpha \models y \subseteq a\}$$

である．したがって，$\mathcal{P}(a) \cap L \in \mathrm{Def}(L_\alpha) = L_{\alpha+1} \subseteq L$ である．

置換公理：L が置換公理を満たすことは，分出公理と同様に証明できる．

基礎の公理：補題 4.1 (2) と系 3.5 (6) によりよい． ■

$\forall x \exists \alpha \in \mathrm{On}(x \in L_\alpha)$ という主張（$\mathcal{L}_\in$ 文）を $V = L$ と表すことにする．

定理 4.3 $L \models$ "$V = L$".

証明 定理 4.2，補題 4.1 (4) および，補題 3.4 (3) により，クラス関数 $\alpha \mapsto L_\alpha$ は L 上で絶対的である．補題 4.1 (3) により，$\mathrm{On} \subseteq L$ だから，$L^L = L$, したがって $L \models$ "$V = L$" となることが分かる． ■

推移的なクラス M で，$\mathrm{On} \subseteq M$ かつ，$M \models \mathrm{ZF}$ となるものを ZF の内部モデル (inner model) と呼ぶ．補題 4.1 (0), (3), 定理 4.2 により，L は ZF の内部モデルである．さらにつぎが成り立つ．

定理 4.4 L は最小の ZF の内部モデルである．つまり，M を任意の ZF の内部モデルとするとき，$L \subseteq M$ が成り立つ．

証明 M を ZF の内部モデルとするとき，定理 4.3 の証明と同様に，$L = L^M \subseteq M$ が示せる． ■

つぎに L が強い形の選択公理を満たすことを示すが，このためにまず辞書式順序 (lexicographical ordering) と，それに類似の順序構造の構成法をみておくことにする．

X を集合として，$\leq_X$ を X 上の線形順序とする．$n \in \omega - \{0\}$ とするとき，X^n 上の $\leq_X$ に関する辞書式順序 $\leq^\ell_{X^n}$ を $\vec{a}, \vec{b} \in X^n$ に対し，

(4.5) $\vec{a} \leq^\ell_{X^n} \vec{b} \;\Leftrightarrow\; i < n$ で $\vec{a} \restriction i = \vec{b} \restriction i$ かつ $a(i) \leq_X b(i)$ となるものが存在する

として定義する．$\leq^\ell_{X^n}$ が線形順序となることは容易に分かる．さらに $\leq_Y$ を集合 Y 上の線形順序とするとき，$X \times Y$ 上の $\leq_X$ と $\leq_Y$ に関する辞書式順序 $\leq^\ell_{X \times Y}$ を，$\langle a, a' \rangle, \langle b, b' \rangle \in X \times Y$ に対し，

(4.6) $\langle a, a' \rangle \leq^\ell_{X \times Y} \langle b, b' \rangle \;\Leftrightarrow\; a \leq_X b$ または $a = b$ かつ $a' \leq_Y b'$

として定義する．$\leq^{\ell}_{X\times Y}$ も線形順序となることをみるのは容易である．

最後に，X と X 上の線形順序 $\leq_X$ に対し $X^{<\omega}$ 上の順序 $\leq_{X^{<\omega}}$ を，$\vec{a}$, $\vec{b}\in X^{<\omega}$ に対し，

$$\vec{a} \leq_{X^{<\omega}} \vec{b} \iff \ell(\vec{a}) < \ell(\vec{b}) \text{ または，} \ell(\vec{a}) = \ell(\vec{b}) = n \text{ かつ } \vec{a} \leq^{\ell}_{X^n} \vec{b} \tag{4.7}$$

により定義する．$\leq_{X^{<\omega}}$ は $X^{<\omega}$ 上の線形順序となる．

つぎは容易に示せる．

補題 4.5　つぎが成り立つ．

(1) $\langle X, \leq_X\rangle$ が整列順序集合なら，すべての $n\in\omega-\{0\}$ に対し $\leq^{\ell}_{X^n}$ も X^n 上の整列順序となる．

(2) $\langle X, \leq_X\rangle$ と $\langle Y, \leq_Y\rangle$ がともに整列順序集合なら，$\leq^{\ell}_{X\times Y}$ も $X\times Y$ 上の整列順序となる．

(3) $\langle X, \leq_X\rangle$ が整列順序集合なら，$\leq_{X^{<\omega}}$ も $X^{<\omega}$ 上の整列順序となる．

$\mathrm{Fml}_{\mathcal{L}_\in}$ は可算だから，$\mathrm{Fml}_{\mathcal{L}_\in}$ に順序型が ω になる整列順序 $\leq_{\mathrm{Fml}_{\mathcal{L}_\in}}$ を入れることができることに注意しておく．

$\alpha\in\mathrm{On}$ に対し L_α 上の整列順序 $\leq_{L_\alpha}$ を，$\leq_{L_\alpha}, \alpha\in\mathrm{On}$ が $\subseteq$ に関する上昇列になるようつぎのように帰納的に定義する．

(4.8)　$\leq_{L_0}=\emptyset$;

(4.9)　$\leq_{L_\alpha}$ がすでに定義されたとき，$\leq_{L_{\alpha+1}}$ を，$a, b\in L_{\alpha+1}$ に対し，

$$\begin{aligned} a \leq_{L_{\alpha+1}} b \iff\ & a = b \vee (a, b\in L_\alpha \wedge a\leq_{L_\alpha} b) \\ & \vee (a\in L_\alpha \wedge b\notin L_\alpha) \\ & \vee \Big(a\notin L_\alpha \wedge b\notin L_\alpha \\ & \qquad \wedge (\exists\vec{a},\vec{b}\in (L_\alpha)^{<\omega})\,(\exists\varphi_0,\varphi_1\in\mathrm{Fml}) \\ & \qquad\quad \Phi(a, b, \vec{a}, \vec{b}, \varphi_0, \varphi_1, L_\alpha, \leq_{L_\alpha})\Big) \end{aligned}$$

として定義する；

(4.10)　γ が極限順序数なら，$\leq_{L_\gamma}=\bigcup_{\alpha<\gamma}\leq_{L_\alpha}$ とする．

ここに，$\Phi(u, v, \vec{u}, \vec{v}, \varphi_0, \varphi_1, X, \leq_X)$ は，

> $u = \{x \in X : X \models \varphi_0(x, \vec{u})\}$, $v = \{x \in X : X \models \varphi_1(x, \vec{v})\}$ で，$\langle \varphi_0, \vec{u} \rangle$ と $\langle \varphi_1, \vec{v} \rangle$ はそれぞれ $\leq_{\mathrm{Fml}_{\mathcal{L}_\in}}$ と $\leq_{X^{<\omega}}$ に関する辞書式順序でこのようなもののうち最小なものとするとき，この順序に関して $\langle \varphi_0, \vec{u} \rangle$ は $\langle \varphi_1, \vec{v} \rangle$ より小さい

を表す $\mathcal{L}_\in$ 論理式とする．

ここで L 上の関係 $\leq_L$ を $a, b \in L$ に対し，

(4.11) $\quad a \leq_L b \;\Leftrightarrow\; (\exists \alpha \in \mathrm{On})(a, b \in L_\alpha \;\wedge\; a \leq_{L_\alpha} b)$

により定義する．L は $\leq_L$ により整列されるが，$\leq_L$ は

(4.12) $\quad a \leq_L b \;\Leftrightarrow\; (\forall \alpha \in \mathrm{On})(a, b \in L_\alpha \;\rightarrow\; a \leq_{L_\alpha} b)$

とも書けるから，Δ_1^{ZF} であることが分かる．したがって，補題 3.4 (0) と補題 3.4 (2) により，$L \models$ “$\leq_L$ は L を整列する” となることが分かる．とくに L のすべての元 a は $\leq_L$ の a への制限により整列されるから，整列可能性定理（定理 2.31）の後の注意により，つぎが分かる．

定理 4.6 $\quad V = L$ の仮定のもとで AC が成り立つ．

定理 4.2 と定理 4.3 により，定理 4.6 から，$L \models \mathrm{AC}$ が帰結できることに注意する．

つぎの補題は L で一般連続体仮説 (GCH) が成り立つこと（定理 4.8）の証明で必要となる．

補題 4.7 $\quad \mathcal{L}_\in$ 文 φ_L で，すべての推移的な M に対し，

(4.13) $\quad M \models \varphi_L \;\Leftrightarrow\;$ ある極限順序数 $\alpha \in \mathrm{On}$, $\alpha > \omega$ に対し $M = L_\alpha$

となるようなものが存在する．

証明 $\quad \varphi_L$ を，

(4.14) $\quad \mathrm{On}^M$ は最大元をもたず，L_α, $\alpha \in \mathrm{On}^M$ は M の被覆になる

を主張するような $\mathcal{L}_\in$ 文とすればよい. ■

定理 4.8 $V = L$ の仮定のもとで GCH が成り立つ.

証明 κ を基数とする. x を $x \subseteq \kappa$ となる集合とする. このとき, 仮定から, $\alpha \in \mathrm{On}$, $\varphi \in \mathrm{Fml}_{\mathcal{L}_\in}$, $a_1, \ldots, a_n \in L_\alpha$ で

$$(4.15) \quad x = \{\xi \in \kappa : L_\alpha \models \varphi(\xi, a_1, \cdots, a_n)\}$$

となるものがとれる. γ を $\alpha < \gamma$ となる極限順序数とする. このとき, レーヴェンハイム・スコーレムの定理 (定理 3.16) により, $M \prec L_\gamma$ で $\kappa+1 \subseteq M$, $\alpha, a_1, \ldots, a_n \in M$ かつ, $|M| = \kappa$ となるものが存在する. $M \equiv L_\gamma$ だから, M は外延的である. したがって, モストウスキの崩壊補題 (定理 2.29) により, M のモストウスキ崩壊 $\pi : M \overset{\cong}{\to} N$ が存在する. 補題 2.30 により $\pi \restriction \kappa+1 = \mathrm{id}_{\kappa+1}$ となるから, $\alpha' = \pi(\alpha)$, $a'_1 = \pi(a_1), \ldots, a'_n = \pi(a_n)$ とすると,

$$(4.16) \quad x = \{\xi \in \kappa : N \models \text{“}L_{\alpha'} \models \varphi(\xi, a'_0, \cdots, a'_n)\text{”}\}$$

となる. 一方 $N \equiv L_\gamma$ だから $N \models \varphi_L$ である. したがって, 補題 4.7 により, ある極限順序数 ξ に対し $N = L_\xi$ となる. $|N| = \kappa$ だから, $\xi < \kappa^+$ である. よって, $x \in L_{\kappa^+}$ である. 以上から $\mathcal{P}(\kappa) \subseteq L_{\kappa^+}$ となることが分かったが, $|L_{\kappa^+}| = \kappa^+$ だから, $2^\kappa \leq \kappa^+$ である. ■

定理 4.2 と定理 4.3 により, 定理 4.8 から, $L \models \mathrm{GCH}$ となることに注意する.

定理 4.9 ([Gödel 1938]) ZF が無矛盾なら, ZF + AC + GCH も無矛盾である.

証明 定理 4.2, 定理 4.6, 定理 4.3, 定理 4.8, および定理 3.2 によりよい. ■

最後に 2.6 節の p.93 で保留にしてあった証明を記しておくことにする. 基数 κ が弱到達不可能 (weakly inaccessible) とは, 正則な極限基数であることとする. GCH のもとでは, κ が弱到達不可能であることと, 到達不可能であることは同値であることに注意する.

定理 4.10 ZFC + $\exists\kappa$(κ は到達不可能基数) と ZFC + $\exists\kappa$(κ は弱到達不可能基数) は無矛盾等価である．

証明 κ が到達不可能基数なら弱到達不可能となることは定義から明らかだから，ZFC + $\exists\kappa$(κ は到達不可能基数) が無矛盾なら，ZFC + $\exists\kappa$(κ は弱到達不可能基数) も無矛盾である．

逆に ZFC + $\exists\kappa$(κ は弱到達不可能基数) のもとで，κ を弱到達不可能基数とすると，"x は弱到達不可能基数" は Π_1^{ZF} で，定理 4.2 により $L \models$ ZF だから，κ は L でも弱到達不可能となる．ここで定理 4.8 により，$L \models$ GCH だから，$L \models$ "κ は到達不可能基数" となる．したがって，$L \models \exists\kappa$("κ は到達不可能基数") である．したがって，定理 3.2 により，ZFC + $\exists\kappa$("κ は到達不可能基数") も無矛盾である． ■

定理 4.11 ZFC が無矛盾なら，ZFC $\not\vdash$ "$\exists\kappa$(κ は弱到達不可能)" である．

証明 定理 4.10 と定理 3.15 によりよい． ■

L の構造や，そこで成り立つ無限組み合わせ論的性質は，その後さらにイェンセンと彼の周辺の研究者たちによって，より精密に調べられている．これについてはたとえば，[Devlin 1984] を参照されたい．なお，このイェンセンによって始められた L の構造研究は，微細構造の理論 (fine structure theory) と呼ばれている．

到達不可能基数より本質的にずっと大きな可測基数などの「巨大基数」の存在のもとでは $V = L$ は成り立たないことが知られている（第 II 部を参照）．しかし，L のような階層構造をもった内部モデルで，このような巨大基数の存在も許すようなものの研究も多くなされている（第 II 部と，そこであげられている参考文献を参照）．巨大基数の存在は，定理 3.15 でもみたように，ZFC から証明することはできないが，ある種類の巨大基数の存在を許すような階層構造をもつ内部モデルの存在は，そのような巨大基数の存在を主張する公理の妥当性に対するある種の保証になっているとみることもできるであろう．このような背景から，より大きな巨大基数に対し，その存在を許す（細部構造をもった）内部モデルの可能性を探究してゆく，というイェンセンに

よる研究方針は，内部モデルプログラム (inner model program) と呼ばれたり，イェンセンのプログラム (Jensen's program) と呼ばれたりする．

4.2 強制法

強制法は，歴史的には連続体仮説の否定の集合論からの無矛盾性証明のためにコーエンによって1960年代初めに導入された [Cohen 1963; 1964]．この手法はソロヴェイらによって一般化され，さまざまな命題の集合論との無矛盾性の証明に威力を発揮する強力なツールとなった．現在では，[Kunen 1980] や [Jech 1978/2003] のような標準的な教科書により，(少なくとも欧米では) 学部の講義でも普通に取り上げられることもあり，誰でもマスターできる標準的な数学的技法となっている．

本節では，強制法の理論の概略を現代的なやり方で導入した後[2)]，コーエンの結果の証明のスケッチを与える（以下の説明で省略した技術的な細部については，たとえば [Kunen 1980] を参照されたい）．

強制法は，非形式的には，ZFC のモデル V が与えられたとき，V の外にジェネリック・フィルター (generic filter)（またはジェネリック集合）と呼ばれる新しい集合 G をとり，V と G から定義される新しい ZFC のモデル（ジェネリック拡大 (generic extention)）$V[G] \supseteq V$ を構成する手法である，ということができる．後でみるように，ある数学的命題 φ が成り立つような $V[G]$ を構成することで ZFC $+\ \varphi$ の無矛盾性を結論することができる．

これは，たとえば，環，つまり環論の公理系のモデル R が与えられたとき，（R の外にある）変数記号 x を使って多項式環 $R[x] \supseteq R$（これも環論の公理系のモデルになっている）を得る，という構成法と比較することができるで

2) コーエンの [Cohen 1963; 1964] での強制法は，現代の用語ではコーエン強制と呼ばれる，後述の定理 4.17 や定理 4.18 などで用いられた特別な場合のみの考察されたもので，現代の強制法の理論と比べると未整理な細部も含むものであった．現代の強制法の理論とほぼ等しい定式化による強制法が導入された一般に入手可能な文献の最初のものの一つは [Shoenfield 1971] であった．なお強制法を用いている現代の文献では強制法の定式化の参照文献として [Kunen 1980] があげられることが多い．

あろう[3]．

しかし，ZFC のモデルに関しては，上のように述べてしまうと，厳密にはいろいろと問題が生じてくる．まず，環論のモデル $R[x]$ の構成の例でもそうだったが，このような構成自身は，集合論の中，あるいは，形式的には ZFC の公理系から演繹される命題の世界の中で行われることになる．ところが，ゲーデルの不完全性定理 [Gödel 1931] により，ZFC の中では ZFC 自身の（集合）モデルの存在は証明できない（補題 3.18）から，上のように議論するためには，議論の枠組としては，ZFC より強い何らかの公理系（たとえば，ZFC に巨大基数の公理を何か一つ付け加えたもの）をとる必要がでてくる．しかし，強制法の目的は，それによって得られたモデル $V[G]$ で，ある数学的命題 φ が成り立つことを示し，そのことから ZFC $+\,\varphi$ の無矛盾性の証明をすることであるから，そのような議論を集合論より強い体系内で行わなくてはいけない，という制約は非常に具合が悪い．V をすべての集合からなる「本物の」集合論のモデルとして議論することも考えられるが，こうすると，「すべての集合と異なる，新しい集合 G を V の外側からとる」ということの意味が不明になってしまう．

このような困難を回避するには，たとえばつぎのように議論すればよい[4]．ZFC′ を ZFC の任意の（しかし具体的に与えられた）有限個の公理からなる（しかし後で必要となる ZFC の公理はすべて含むような）部分公理系とする[5]．このようなものに対しては，“推移的な可算集合 M で $\langle M, \in\rangle$ が ZFC′ を満たすようなものが存在する” という命題が ZFC の中で証明できるのだった（定理 3.17）．

ある集合論的命題 φ に対し，このような M をとり，G をうまく選ぶと，

---

3) 複数の変数記号 $x_1, x_2, \ldots$ を使って $R[x_1, x_2, \cdots]$ をとり，さらに適当なイデアル I で割って環 $R[x_1, x_2, \cdots]/I$ を得る，という構成法の方が，ある意味で，ジェネリック拡大との，より密接なアナロジーを与えるといえるかもしれない．

4) ここでの問題は，後出の $p, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n$ 上の関係 $p \Vdash_P \varphi(\dot{x}_1, \cdots, \dot{x}_n)$ を用いて議論することによっても解消できる．くわしくは [Kunen 1980, Ch.VII §9] を参照されたい．

5) ごく厳密にいうと，以下の $M[G]$ の構成では，ZFC′ にさらにいくつかの ZFC の公理を付け足して，以下で説明する強制法の議論もそこで展開できる程度の余裕をもった（しかし依然として有限な）公理系 ZFC″ に拡張しておき，ZFC″ の公理をすべて満たすような M をとる必要がある．

$\langle M[G], \in\rangle$ が ZFC$'$ と φ を満たすようにとれるなら，φ の否定 $\neg\varphi$ は ZFC$'$ から証明することができないことが分かる．$\langle M[G], \in\rangle$ が ZFC$'$ を満たすことから，もし $\neg\varphi$ が ZFC$'$ から証明できたとすると $\langle M[G], \in\rangle$ は $\neg\varphi$ も満たさなくてはならなくなり，ZFC から矛盾が証明できてしまうからである．ここで ZFC$'$ は「十分に大きい」ことを除くと任意の ZFC の有限部分だったから，ZFC が無矛盾である，という仮定から，$\neg\varphi$ が ZFC から証明できないことの証明が得られたことになる．

強制法の理論の技術的な細部をもう少しくわしくみてみることにする[6)]．（後の議論で必要となるようなすべての ZFC の公理を含んでいる，という意味で）十分に大きな，有限な ZFC の部分体系 ZFC$'$ に対し，M を上のようなものとする．M は ZFC$'$ を満たすので，ほとんど ZFC のモデルであるかのように扱うことができる．そこで，以下では煩雑をさけるために ZFC$'$ と書くかわりに ZFC と書いてしまうことにする．M の元 $\mathbb{P} = \langle P, \leq\rangle$ が強制概念 (forcing notion) であるとは，$\mathbb{P}$ が最大元 $1_{\mathbb{P}}$ をもつ擬順序 (pseudo-ordering) であることとする[7)]．$D \subseteq P$ が $\mathbb{P}$ で稠密 (dense) とは，すべての $p \in P$ に対し，$q \in D$ で $q \leq p$ となるものがとれることである．（必ずしも M に要素として属さない）$G \subseteq P$ が $\mathbb{P}$ 上のフィルター (filter) であるとは，

(4.17)　G は上方向に閉じていて；

(4.18)　任意の $p, q \in G$ に対し，$r \leq p, q$ となる $r \in G$ が存在する

こととする[8)]．$\mathbb{P}$ 上のフィルター G が M ジェネリック・フィルターであるとは，

(4.19)　$\mathbb{P}$ で稠密な $D \in M$ に対し，$D \cap G \neq \emptyset$ がつねに成り立つ

6)　以下の議論は ZFC の公理系から演繹される命題の記述する世界（直観的には集合論の「宇宙」）で行われていることに注意する．

7)　$\langle P, \leq\rangle$ が擬順序であるとは，$\leq$ が推移的関係で，$p \leq p$ がすべての $p \in P$ に対し成り立つことである．

8)　$r \leq p, q$ となる r が存在するとき，p と q は共存可能 (compatible) であるという．またこのような r が存在しないときには，p と q は共存不可能 (incompatible) であるという．

こととする（G は M 上の P ジェネリック・フィルターである，または，G は (P, M) ジェネリック・フィルターである，という言い方をすることもある）．

補題 4.12 任意の強制概念 $P \in M$ と $p \in P$ に対し P 上の M ジェネリック・フィルターで p を含むものが（M の外で）構成できる．

証明 M は可算だったから，M の要素 D で P の稠密部分集合となっているものは（M の外でみると）可算個しかない．したがって，これらを $D_0, D_1, D_2, \ldots$ と枚挙することができるから，P の元 $p_0, p_1, p_2, \ldots$ を

(1) $p \geq p_0 \geq p_1 \geq p_2 \geq \cdots$;
(2) すべての $i \in \omega$ に対し，$p_i \in D_i$

となるように帰納的にとることができる — (2) は各 D_i が稠密であることから可能である．このとき，

$$G = \{q \in P : ある\ i \in \omega\ に対し\ p_i \leq q\}$$

とすれば，G は p を含む P 上の M ジェネリック・フィルターとなる． ■

上の証明では，$D_i \subseteq P$ で，$P \in M$ により M の推移性から $P \subseteq M$ となるから，各 p_i は M の元であるが，枚挙 $\langle D_i : i \in \omega \rangle$ は一般には M の中にとれないため（M は P の稠密部分集合が不可算個あると「思っている」かもしれない！），これを用いた $p_0, p_1, p_2, \ldots$ の帰納的構成も一般には M の外側で行われている．したがって，G が M の元であることは保証できない．実はつぎが成り立つ．

補題 4.13 すべての $p \in P$ に対し，$p_0, p_1 \leq p$ で共存不可能なものがとれるとする．このとき，P 上の M ジェネリック・フィルターはすべて M の元でない．

M ジェネリック・フィルター G が M の元だったとして矛盾を示す．このときには，$D = P - G$ とすると，M が ZFC のモデルであることから，D も M の元である．さらに，

クレイム 4.13.1 D は P で稠密である．

$\vdash$　$p \in P$ をとると，仮定から，$p_0, p_1 \leq p$ で互いに共存不可能なものが存在する．もし p_0 も p_1 も D の元でないとすると，両方とも G の元となるが，これは，G が (4.18) を満たすことに矛盾である．　$\dashv$

したがって，(4.19) により $D \cap G \neq \emptyset$ とならなくてはならないが，D の定義から，これは不可能である．　■

上のような M, P, G に対し，ZFC の可算で推移的なモデル N で，つぎを満たすものが構成できる[9]．

(4.20)　$M \subseteq N$ で $G \in N$；

(4.21)　M の順序数の全体は N の順序数の全体と一致する；

(4.22)　N は (4.20) と (4.21) を満たす ZFC の可算推移的モデルのうち $\subseteq$ に関し最小のものである．

(4.22) により，上のような N は一意に決まるので，これを $M[G]$ と書き，M の G による P 上のジェネリック拡大と呼ぶ[10]．

ここで決定的なのは，N の性質がすでに M の中で（かなりの程度まで）記述できる，ということである．

(4.23)　$M[G]$ の各元の名称，あるいは P 名称 (P-name) を G に依存しない形で定義できる．つまり，P 名称の全体 $M^P \subseteq M$ が（P をパラメタとして）M で定義可能なクラスとして導入でき，P 上の M ジェネリック・フィルター G を決めると，各 $\dot{x} \in M^P$ に対し，$\dot{x}$ の G による解釈 $\dot{x}^G$ が，$M[G] = \{\dot{x}^G : \dot{x} \in M^P\}$ となるように（M の外で各 G に対し一様に）定義でき，M の各元 x については，その標準的名称 $\check{x} \in M^P$ が，すべての G に対し $\check{x}^G = x$ となるよう定義できる．

---

9)　ここでの，「ZFC の可算で推移的なモデル N」は厳密には，「ZFC$'$ を含む ZFC の十分に大きな部分集合 ZFC$''$ の可算で推移的なモデル N」とするべきものである．ただし，ZFC$''$ を具体的に特定するためには，強制法の構成法の細部を子細に分析しなくてはならなくなるため，ここでは割愛せざるを得ない．

10)　ここでのジェネリック・フィルターやジェネリック拡大という用語は，それぞれ，汎用フィルター，また，強制拡大などと翻訳されることもある．

$\check{x}$ は，混乱の生じる恐れのない場合には x と同一視して，x で表すことも多い．

さらに，$p \in P$ と，集合論での命題を表す論理式 φ および $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n \in M^P$ に対し，$p \Vdash_P \varphi(\dot{x}_1, \cdots, \dot{x}_n)$ を，「p を含むすべての P 上の M ジェネリック・フィルター G に対し，$\varphi(\dot{x}_1^G, \cdots, \dot{x}_n^G)$ が $M[G]$ で成り立つ」ことと定義すると，$\mathcal{L}_\in$ の論理式 φ 一つ一つに対し，

(4.24) p と $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n$ を変数とする関係，"$p \Vdash_P \varphi(\dot{x}_1, \cdots, \dot{x}_n)$" は M で定義可能である

となる．1_P を P の最大元とするとき，すべての P 上の M ジェネリック・フィルターは 1_P を含むから，$M \models$ "$1_P \Vdash_P \varphi(\dot{x}_1, \cdots, \dot{x}_n)$" なら $M[G] \models \varphi(\dot{x}_1^G, \cdots, \dot{x}_n^G)$ がすべての P 上のジェネリック拡大で成り立つ．"$1_P \Vdash_P \cdots$" を "$\Vdash_P \cdots$" とも書く．

$\dot{G}^G = G$ がすべての P 上の M ジェネリック・フィルター G に対し成り立つような，標準的な名称 $\dot{G}$ も構成できる．これに対しては，つぎの同値が成り立つ．

(4.25) すべての $p, q \in P$ に対し，$M \models$ "$p \Vdash_P q \in \dot{G}$" $\Leftrightarrow$ すべての $r \leq p$ に対し，$s \leq r$ で $s \leq q$ となるものが存在する[11]．

つぎの性質も重要である．

(4.26) P 上の M ジェネリック・フィルター G に対し，$M[G] \models \varphi(\dot{x}_1^G, \cdots, \dot{x}_n^G)$ なら，$p \in G$ で，$M \models$ "$p \Vdash_P \varphi(\dot{x}_1, \cdots, \dot{x}_n)$" となるものが存在する．

つぎの補題は，この性質からただちに導ける．

補題 4.14 (1) すべての $p \in P$, 論理式 φ, $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n \in M^P$ に対し，$q \leq p$ で $M \models$ "$q \Vdash_P \varphi(\dot{x}_1, \cdots, \dot{x}_n)$" または，$M \models$ "$q \Vdash_P \neg\varphi(\dot{x}_1, \cdots, \dot{x}_n)$" となるものが存在する．

11) P が分離的なとき，つまりすべての $p, q \in P$ について $p \leq q$ でないなら $r < p$ で q と共存不可能なものが存在するときには，さらに，すべての $p, q \in P$ について，$M \models$ "$p \Vdash_P q \in \dot{G}$" $\Leftrightarrow p \leq q$ が成り立つ．

(2) すべての $p \in P$, 論理式 φ, $\dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n \in M^P$ に対し，$M \models$ “$p \Vdash_P \exists x \varphi(x, \dot{x}_2, \cdots, \dot{x}_n)$” なら，$q \leq p$ と $\dot{x}_1 \in M^P$ で，$M \models$ “$q \Vdash_P \varphi(\dot{x}_1, \cdots, \dot{x}_n)$” となるものが存在する．

(3) すべての $p \in P$ と $X \in M$ と P 名称 $\dot{x}$ に対し，$M \models$ “$p \Vdash_P \dot{x} \in X$” なら，$q \leq p$ と $x \in X$ で，$M \models$ “$q \Vdash_P \dot{x} = x$” となるものが存在する．

強制概念 P が c.c.c. (countable chain condition) を満たすとは，不可算な $X \subseteq P$ はつねに共存可能な異なる 2 元をもつことである．c.c.c. を満たす強制概念は強制法の理論で非常に重要な役割を果たすが，つぎの補題はその理由の一端を示している．

補題 4.15 $P \in M$ を M での強制概念で $M \models$ “P は c.c.c. を満たす” となるものとする．このとき任意の P 上の M ジェネリック・フィルター G に対して，κ が M での基数なら，κ は $M[G]$ でも基数となる[12)]．

証明 まず，M での $\aleph_1$（これを $(\aleph_1)^M$ と書くことにする）が $M[G]$ でも $\aleph_1$ になっていることを示すことにする．$(\aleph_1)^M$ が $M[G]$ で基数になっていないとすると，ω から，$(\aleph_1)^M$ への上射 $f \in M[G]$ が存在する．$\dot{f}$ を f の P 名称とする（つまり，$\dot{f}$ を $f = \dot{f}^G$ となるようなものとする）．このとき $p_0 \in G$ で $p_0 \Vdash_P$ “$\dot{f}$ は ω から $(\aleph_1)^M$ への関数である” となるものがとれる．

以下は M の中で議論する．補題 4.14 (2), (3) により，すべての $n \in \omega$ に対し $D_n \subseteq P$ でつぎを満たすものが存在する．

(4.27) すべての $p \in D_n$ に対し，p は p_0 と共存不可能であるか，あるいは，$k_p \in \omega$ で，$p \Vdash_P$ “$\dot{f}(n) = k_p$” となるものが存在する；

(4.28) D_n の異なる元は，互いに共存不可能である；

(4.29) D_n は (4.27), (4.28) を満たすもののうちで $\subseteq$ に関し最大である．

このとき，D_n は (4.28) と P が c.c.c. を満たすことから可算である．したがって，また，

(4.30) $E_n = \{k_p : p \in D_n\}$ も可算となる．

12) このようなとき P は基数 κ を保存する (preserve) という．

D_n の極大性から，$\{p \in P : ある\ q \in D_n\ に対し\ p \leq q\}$ は P の稠密な部分集合となることが分かる．このことから，

(4.31) すべての $n \in \omega$ に対し，$f(n) = \dot{f}^G(n) \in E_n$ である．

D_n も E_n も M で（一様に）定義可能だから（M が ZFC を満たすことから），$\{D_n : n \in \omega\}, \{E_n : n \in \omega\} \in M$ である．したがって，$E = \bigcup\{E_n : n \in \omega\}$ も M の可算な元となる．とくに $E \subsetneq (\aleph_1)^M$ となるが，(4.31) により，$f``\omega \subseteq E$ である．しかし，これは f が $(\aleph_1)^M$ への上射であることに矛盾である．

一般には，$(\aleph_1)^M$ 以外のすべての M での正則基数 κ に対しても $(\aleph_1)^M$ の場合とほとんど同一の議論により κ が $M[G]$ の基数になることが証明できる．このことと，特異基数は正則基数の極限になっており，基数の極限はつねに基数となることから，κ が M での特異基数である場合も κ の基数性は $M[G]$ で保存されることが分かる． ■

コーエンが連続体仮説の独立性を証明したときに用いた強制概念 $\mathrm{Fn}(X, 2)$ は c.c.c. を満たす強制概念の典型的な例の一つとなっている．X と Y を集合とするとき，

(4.32) $\mathrm{Fn}(X, Y) = \{f : f\ は\ X\ の有限部分集合から\ Y\ への関数\}$

として，

(4.33) $f, g \in \mathrm{Fn}(X, Y)$ に対し，$f \leq g \Leftrightarrow f$ は g の拡張である

と定義する．このとき，Δ 補題と呼ばれる組み合わせ論的な道具を用いると，

定理 4.16 可算な Y に対し，$(\mathrm{Fn}(X, Y), \leq)$ は c.c.c. を満たす．

が証明できる．

とくに M で $X = \aleph_2 \times \omega$ で[13]，$Y = 2$ としたとき $P = (\mathrm{Fn}(X, Y), \leq)$ 上の M ジェネリックな G をとると，ジェネリック性により，$g = \bigcup G$ は $\aleph_2^M \times \omega$

13) つまり，$X = (\aleph_2)^M \times \omega$ である．

から 2 への写像となり，各 $\alpha \in (\aleph_2)^M$ に対し，$g_\alpha : \omega \to \omega;\ n \mapsto g(\alpha, n)$ とすると，ジェネリック性から g_α, $\alpha \in (\aleph_2)^M$ は互いに異なる関数となる．したがって，補題 4.15 により，$M[G]$ では "$2^{\aleph_0} \geq (\aleph_2)^M = \aleph_2$"，つまり $\neg$CH が成り立つことが分かる．同様に $cf(\kappa) > \omega$ となる M の基数 κ から出発すると，$2^{\aleph_0} = \kappa$ のモデルが得られる．

このことを p.138 の議論と組み合わせると，以下の定理の証明が得られたことになる．

定理 4.17（[Cohen 1963; 1964]） ZFC が矛盾しないなら，ZFC + $\neg$CH も矛盾しない（とくに，たとえば，ZFC + $2^{\aleph_0} = \aleph_{1954}$ も矛盾しない）．

上の定理の命題は，ZF で L をとり，この中で議論することにより，

> ZF が矛盾しないなら，ZFC + $\neg$CH も矛盾しない（とくに，たとえば，ZFC + $2^{\aleph_0} = \aleph_{2007}$ も矛盾しない）

に改良することもできる．

定理 4.17 は，$P = (\mathrm{Fn}(\kappa \times \omega, 2), \leq)$ として，P 上 M ジェネリックな G に対し，$M[G] = \{\dot{x}^G : \dot{x} \in M^P\}$ が $\neg$CH のモデルになることから示せたのだったが，ここでの M^P の部分集合 S をうまく選び $N = \{\dot{x}^G : s \in S\}$ をとることにより，ZF + $\neg$AC のモデル $N \subseteq M[G]$ を構成できる．このことから，つぎが示せる．

定理 4.18（[Cohen 1963; 1964]） ZF が矛盾しないなら，ZF + $\neg$AC も矛盾しない．

一方，不可算な基数 κ に対する 2^κ の値に関しては，定理 4.17 の証明で用いた $P = \mathrm{Fn}(\kappa \times \omega, 2)$ を変形して，

$$(4.34)\quad \mathrm{Fn}(X, Y, \lambda) = \{f : f \text{ は } X \text{ の濃度 } \lambda \text{未満の有限部分集合から } Y \text{ への関数}\}$$

に (4.33) で順序を入れたものを考える．このような強制概念が基数を保存することは一般には保証できないが，λ が（不可算な）正則基数で，M が λ 未

満の基数で GCH を満たすなら，任意の κ に対し，P として $\mathrm{Fn}(\kappa \times \lambda, 2, \lambda)$ を（M で）とると，M の基数はすべて保存される．また定理 4.17 の前での議論と同様に，$\mathrm{Fn}(\kappa \times \lambda, 2, \lambda)$ は λ から 2 への互いに異なる κ 個の関数を付け加えることが分かる．一方，上のような P は濃度が λ 未満の集合を一つも付け加えないことは容易に示せる．したがって，たとえば $V = L$ から出発して定理 4.17 でと同様に議論することで，

定理 4.19（[Cohen 1963; 1964]） ZF が矛盾しないなら，ZFC + CH + ¬GCH も矛盾しない

が証明できる．また，上のような強制概念による拡張を有限回くり返すことで，たとえば，$2^{\aleph_0} = \aleph_{1906} + 2^{\aleph_1} = \aleph_{1978} + 2^{\aleph_2} = \aleph_{2007}$ が ZFC と無矛盾であることも証明できる[14]．

イーストンは [Easton 1970] で，上のようなくり返しを「真のクラス回」行う方法を確立して，正則基数に対する初等的な基数算術と矛盾しないような，各正則基数 κ に対する 2^κ の付値は，すべて可能であることを示した．これに対し，特異基数 λ に対する 2^λ の値に関する状況は非常に複雑であることが分かってきており，このことは特異基数問題 (singular cardinal problem) と呼ばれている．第 2 章で述べたシェラハの基数算術の理論も，この問題に深く関連している．特異基数問題については本書第 II 部の第 4 章も参照されたい．

14) より具体的には，ZFC+GCH のモデルを，$2^{\aleph_2} = \aleph_{2007}$ が成り立つよう $\mathrm{Fn}(\omega_{2007} \times \omega_2, 2, \omega_2)$ によって $M[G_2]$ に拡張し，$M[G_2]$ の中で $\mathrm{Fn}(\omega_{1978} \times \omega_1, 2, \omega_1)$ をとり，これを使って $M[G_2]$ を $M[G_2][G_1]$ に拡張し，最後に $\mathrm{Fn}(\aleph_{1906} \times \omega, 2)$ で $M[G_2][G_1]$ を $M[G_2][G_1][G_0]$ に拡張すれば，このモデルが求めるようなものになっている．

参考文献

[Aigner and Ziegler 1998] Aigner, A. and Ziegler, G. M., *Proofs from THE BOOK*, Springer-Verlag (1998).

[Bartoszyński and Judah 1995] Bartoszyński, T. and Judah, H., *Set Theory — On the structure of the real line*, A K Peters, Ltd. (1995).

[Bernays 1937] Bernays, P., "A system of axiomatic set theory, Part I," *Journal of Symbolic Logic*, **2** (1937), 65–77.

[Brendle *et al.* 200?] Brendle, J., Larson, P. and Todorcevic, S., "Rectangular axioms, perfect set properties, and decompositions," preprint.

[Ciesielski 1997] Ciesielski, K., "Set theoretic real analysis," *Journal of Applied Analysis*, **3**(2) (1997), 143–190.

[Cohen 1963] Cohen, P., "The independence of the Continuum Hypothesis I," *Proceedings of the National Academy of Sciences U.S.A.*, **50** (1963), 1143–1148.

[Cohen 1964] Cohen, P., "The independence of the Continuum Hypothesis II," *Proceedings of the National Academy of Sciences U.S.A.*, **51** (1964), 105–110.

[Devlin 1984] Devlin, K. J., *Constructibility*, *Perspectives in Mathematical Logic*, Springer-Verlag (1984).

[Easton 1970] Easton, W. B., "Powers of regular cardinals," *Annals of Mathematical Logic*, **1** (1970), 139–178.

[Erdős 1964] Erdős, P., "An interpolation problem associated with the continuum hypothesis," *Michigan Math. J.*, **11**, (1964), 9–10.

[Feferman *et al.* 1995] Feferman, S., Dawson, Jr. J. W., Goldfarb, W., Parsons, C., and Solovay, R. (eds.), *Kurt Gödel*, *Collected Works*, *Volume III*, *Unpublished Essays and Lectures*, Oxford University Press (1995).

[渕野 2000] 渕野昌「ヒルベルト 23 の問題・第 1 問題 — 連続体仮説」in 日本評論社編『20 世紀の予想，現代数学の軌跡』日本評論社 (2000).

[渕野 2004] 渕野昌「Forcing Axioms と連続体問題 — 公理的集合論の最近の話題から」,『数学』, **56**, no.3 (2004), 248–259.

[Friedman 1971] Friedman, H. M., "Higher set theory and mathematical practice," *Annals of Mathematical Logic*, **2** (1971), 325–357.

[Gödel 1930] Gödel, K., "Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls," *Monatshefte für Mathematik und Physik*, **37** (1930), 349–360.

[Gödel 1931] Gödel, K., "Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I," *Monatshefte für Mathematik und Physik*, **38** (1931), 173–198.

[Gödel 1938] Gödel, K., "The consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis," *Proceedings of the National Academy of Sciences U.S.A.*, **24** (1938), 556–557.

[Gödel 1940] Gödel, K., *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory*, Annals of Mathematics Studies #3, Princeton University Press (1940).

[Gödel 1947/64] Gödel, K., "What is Cantor's Continuum Problem?," *American Mathematical Monthly*, **54** (1947), 515–525. Errata, **55** (1948), 151. Revised and expanded version in Benacerraf, P. and Putnam, H. (eds.), *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*, Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall (1964), 258–273.

[Gödel 1970] Gödel, K., "Some considerations leading to the probable conclusion that the true power of the continuum is $\aleph_2$," in [Feferman *et al.* 1995], pp.420–422.

[Holz *et al.* 1999] Holz, M., Steffens, K. and Weitz, E., *Introduction to Cardinal Arithmetic*, Birkhauser (1999).

[Jech 1978/2003] Jech, T. J., *Set Theory The Third Millennium Edition, revised and expanded*, Springer-Verlag (2003).

[Kanamori 1994/2003] Kanamori, A., *The Higher Infinite: Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings*, Second Edition, Springer-Verlag (2003). 邦訳：『巨大基数の集合論』, 渕野昌訳, シュプリンガー・フェアラーク東京 (1998).

[Kanamori 1996] Kanamori, A., "Set theory from Cantor to Cohen," *Bulletin of Symbolic Logic*, **2** (1996), 1–71.

[Koppelberg 1995] Koppbelberg, S., *Einführung in die Logik und Mengenlehre*, lecture note, Freie Universität Berlin (1995).

[Kunen 1980] Kunen, K., *Set Theory, An Introduction to Independence Proofs*, North-Holland (1980).

[MacLane 1971] Mac Lane, S., *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag (1971).

[Shelah 1994] Shelah, S., *Cardinal Arithmetic*, Clarendon Press (1994).

[Shoenfield 1971] Shoenfield, J. R., "Unramified forcing," in: Scott, D. S. (ed.), *Axiomatic Set Theory*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics vol. 13, part 1. Providence, American Mathematical Society (1971).

[Sierpiński 1920] Sierpiński, W., "Sur les rapports entre l'existence des intégrales $\int_0^1 f(x,y)dx$, $\int_0^1 f(x,y)dy$ et $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$," *Fund. Math.* **1** (1920), 142–147. Reprinted in *Oeuvres Choisies*, vol. II, 341–345.

[Sierpiński 1934] Sierpiński, W., *Hypothèse du continu*, Monografie Matematyczne, Tom IV, Warsaw (1934).

[Skolem 1923] Skolem, T., "Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre," in: *Matematikerkongressen i Helsingfors den 4–7 Juli 1922, Den femte skandinaviska matematikerkongressen*, Redogörelse Helsinki, Akademiska-Bokhandeln (1923), 217–232.

[Solovay ∞] Solovay, R., "The consistency strength of NFUB," preprint. `http://math.berkeley.edu/~solovay/Preprints/NFUB.tex.gz`

[Takeuti and Zaring 1971] Takeuti, G. and Zaring, W. M., *Introduction to Axiomatic Set-Theory*, Springer-Verlag (1971).

[竹内 1998] 竹内外史『ゲーデル（新版）』, 日本評論社 (1998).

[田中（尚）1982] 田中尚夫『公理的集合論』，培風館 (1982).

[田中（尚）1987/1999] 田中尚夫『選択公理と数学 — 発生と論争，そして確立への道』，増補版，遊星社 (1987/1999).

[田中 (一) 1990] 田中一之「'逆·数学' と 2 階算術の証明論」,『数学』**35**(4) (1990), 244–260.

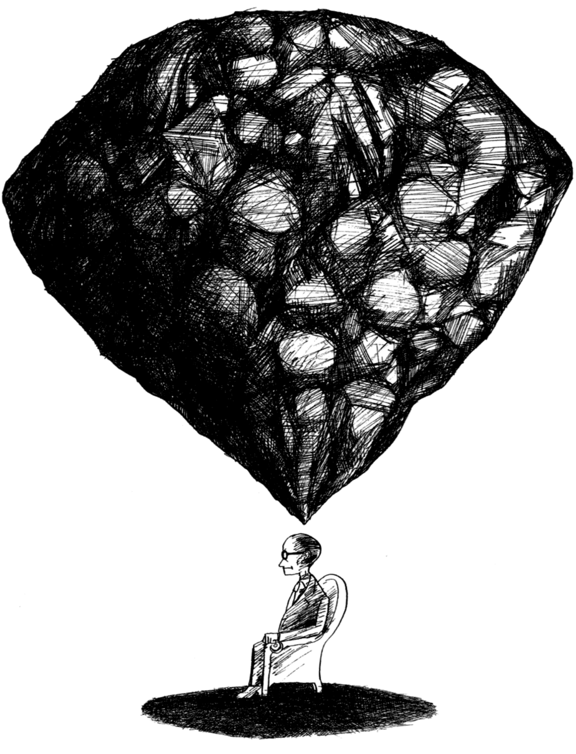
[田中（一）1997] 田中一之『逆数学と 2 階算術』，数学基礎論シリーズ 4 巻，河合文化教育研究所 (1997).

II

集合論の発展

ゲーデルのプログラムの視点から

松原 洋



この第II部では，ゲーデルの「カントルの連続体問題とは何か」という論文から出発して，20世紀後半の集合論の発展について概説していく．この論文には，ゲーデルの集合論に関する思想とそれに基づく集合論の研究の指針（ゲーデルのプログラム）が明示されている．

上記の論文において，ゲーデルは「実数の集合の正則性に関する問題」，「巨大基数公理」，「基数の算術の問題」，「内部モデル」などに言及している．これらのテーマは，その後の集合論の発展にとって中心的な役割を果たしていった．

有名なゲーデルやコーエンの業績が世に出たのち，集合論は大きく発展してきた．残念ながら，限られた紙数ではその全体像を伝えることは不可能である．本稿ではゲーデルが「カントルの連続体問題とは何か」で触れていたいくつかのテーマについて，ゲーデルのプログラムの視点から概説を試みることにする．


WHAT IS CANTOR'S CONTINUUM PROBLEM?

KURT GÖDEL, Institute for Advanced Study

1. The concept of cardinal number. Cantor's continuum problem is simply the question: How many points are there on a straight line in Euclidean space? In other terms, the question is: How many different sets of integers do there exist?

This question, of course, could arise only after the concept of "number" had been extended to infinite sets; hence it might be doubted if this extension can be effected in a uniquely determined manner and if, therefore, the statement of the problem in the simple terms used above is justified. Closer examination, however, shows that Cantor's definition of infinite numbers really has this character of uniqueness, and that in a very striking manner. For whatever "number" as applied to infinite sets may mean, we certainly want it to have the property that the number of objects belonging to some class does not change if, leaving the objects the same, one changes in any way whatsoever their properties or mutual relations (*e.g.*, their colors or their distribution in space). From this, however, it follows at once that two sets (at least two sets of changeable objects of the space-time world) will have the same cardinal number if their elements can be brought into a one-to-one correspondence, which is Cantor's definition of equality between numbers. For if there exists such a correspondence for two sets A and B it is possible (at least theoretically) to change the properties and relations of each element of A into those of the corresponding element of B, whereby A is transformed into a set completely indistinguishable from B, hence of the same cardinal number. For example, assuming a square and a line segment both completely filled with mass points (so that at each point of them exactly one mass point is situated), it follows owing to the demonstrable fact that there exists a one-to-one correspondence between the points of a square and of a line segment, and, therefore, also between the corresponding mass points, that the mass points of the square can be so rearranged as exactly to fill out the line segment, and vice versa. Such considerations, it is true, apply directly only to physical objects, but a definition of the concept of "number" which would depend on the kind of objects that are numbered could hardly be considered as satisfactory.

So there is hardly any choice left but to accept Cantor's definition of equality between numbers, which can easily be extended to a definition of "greater" and "less" for infinite numbers by stipulating that the cardinal number M of a set A is to be called less than the cardinal number N of a set B if M is different from N but equal to the cardinal number of some subset of B. On the basis of these definitions it becomes possible to prove that there exist infinitely many different infinite cardinal numbers or "powers," and that, in particular, the number of subsets of a set is always greater than the number of its elements; furthermore it becomes possible to extend (again without any arbitrariness) the arithmetical operations to infinite numbers (including sums and products with any infinite

515

図 0.1　論文「カントルの連続体問題とは何か」のタイトルページ [Gödel 1947]

第1章
「カントルの連続体問題とは何か」

1947 年ゲーデルは「カントルの連続体問題とは何か (What is Cantor's Continuum problem?)」という論文を *American Mathematical Monthly* 誌に発表した．同誌を編集していた数学者フォードの要請を受けて書かれたこの論文は，ゲーデルによる唯一の一般向けに書かれた論文である．10 ページにも満たない短さながら，ゲーデルの集合論に対する思想やそれに基づいた研究の指針（ゲーデルのプログラム）が語られていて，とても興味深い論文である．ゲーデルがそこで触れていたいくつかのテーマは，その後の集合論の発展に重要な役割を果たしていった．この章では「カントルの連続体問題とは何か」を通して，それらのテーマについて述べていく．

「カントルの連続体問題とは何か」が出版された 17 年後，*Philosophy of Mathematics: Selected readings* という論文集に再録したいという要請を受けて，ゲーデルは 100 カ所以上に及ぶ改訂を施した．そうして生まれたのが 1964 年版の「カントルの連続体問題とは何か」である．多くの改訂箇所にもかかわらず，基本的な内容には大きな違いはない．ここでは 1947 年版と 1964 年版の間に字句やスタイルの違いより本質的な相違点があるときのみ，どちらの版か明記することにする．

ここで「カントルの連続体問題とは何か」の構成について解説する．この論文は次の四つの節からなっている．

(1)　基数の概念

(2) 連続体問題，連続体仮説，およびその真偽に関してこれまでに得られた部分的結果
(3) 集合論の基礎の分析に基づいた連続体問題の再定式化，およびそうした路線から得られた種々の結果
(4) 連続体問題の解決は，いかなる意味で，またいかなる方向に期待しうるかという問いに関する若干の考察

ゲーデルは (1) 節を「ユークリッド空間内の 1 本の直線上にはいくつの点があるか？」という形でカントルの連続体問題を紹介することから書きおこしている．そして「いくつ」という数の概念を無限へ拡張するために，「2 つの集合の間に 1–1 対応が存在するときには，その集合たちは同じ濃度を持つ」というカントルの濃度の概念を述べている．そして選択公理を仮定すればすべての集合の濃度を測る目盛りとして基数を用いることができると説いている．ここでゲーデルは選択公理について「この公理は，今日では，ほとんどすべての観点から見て，集合論の他の諸公理と同じだけの十分な基礎を有していると言ってよい」と語っている．

(2) 節では連続体問題が「どのアレフが，ユークリッド空間内の 1 本の直線上の点の数か？」という形に言い換えられていれる．つまりこれは「$|\mathbb{R}| = \aleph_\alpha$ となる順序数 α は何か？」という問題である．ゲーデルはカントルが $\mathbb{R}$ の濃度が $\aleph_0$ より大きいことを示した後，それは $\aleph_1$ であろうと予想したことを述べている．これがカントルの連続体仮説 (Continuum Hypothesis) である．ここでゲーデルは連続体仮説が「$\mathbb{R}$ の部分集合はすべて可算以下の濃度を持つか $\mathbb{R}$ 全体と同じ濃度を持つ」という命題と同値だと書いている．実はこの命題は「弱い連続体仮説」と呼ばれているものである．“$|\mathbb{R}| = \aleph_1$” という命題には「$\mathbb{R}$ の整列可能性」が含有されており，ここではゲーデルは選択公理を暗に仮定して話を進めている．選択公理（より正確には $\mathbb{R}$ の整列可能性）のもとでは，連続体仮説 ($|\mathbb{R}| = \aleph_1$) と弱い連続体仮説は同値である．

つぎにゲーデルは以下の (a) と (b) を除けば $\mathbb{R}$ の濃度に関しては何も証明されていないことを強調している．知られている 2 点とは，

(a) $\mathbb{R}$ の濃度は可算個のそれより小さい濃度たちの極限にはならない；

(b) $\mathbb{R}$ の解析集合は，すべて可算以下の濃度をもつか $\mathbb{R}$ 全体と同じ濃度をもつ（つまり解析集合に限定すれば弱い連続体仮説は成立する）

という定理である．ここでやっとゲーデルは $\mathbb{R}$ の濃度が $2^{\aleph_0}$ であることを述べている．上の (a) は通常 $cf(2^{\aleph_0}) > \omega$ という形で述べられているケーニヒの定理であり，(b) は後述する「解析集合は完全集合の性質を満たす」という記述集合論におけるスースリンの定理から得られる結果である．解析集合とはボレル集合の射影として得られる集合である．解析集合については，2.1 節で解説する．

つぎにゲーデルはより一般的な無限基数の算術（とくにベキ計算）の問題へと話を進めている．基数の算術において，二つの無限基数 κ と λ に対し $\kappa + \lambda = \kappa \times \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$ が成立することはよく知られている．最初に現れる自明でない基数算術の問題はまさに $2^{\aleph_0}$ の計算である．ゲーデルは $2^{\aleph_0}$ についてつぎの (i)–(iv) のいずれも分かっていないと述べている．

(i) （アプリオリに）$2^{\aleph_0}$ の上界となるような基数 $\aleph_\alpha$ は存在するか？

(ii) $2^{\aleph_0}$ は正則基数か特異基数か？

(iii) $2^{\aleph_0}$ は到達可能か，あるいは弱到達不可能[1)]か？

(iv) ケーニヒの定理以外の $cf(2^{\aleph_0})$ に関する情報．

その後でゲーデルは，無限基数の算術は $\aleph_\alpha^{cf(\aleph_\alpha)}$（$\alpha$ は任意の順序数）を計算するという問題に還元できると述べている（これは後年 [Bukovský 1965] によって確認された）．そして一般連続体仮説（すべての順序数 α に対し $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$）を仮定すれば無限基数の算術的問題は簡単に解けてしまうが，一般連続体仮説については以下のことすら分かっていないとゲーデルは指摘する．「基数 κ，λ に対し，$\kappa < \lambda$ より $2^\kappa < 2^\lambda$ は導けるか？（勿論 $2^\kappa \leq 2^\lambda$ は簡単に得られる）」

(3) 節ではゲーデルは今までみてきたように連続体問題についてわずかな結果しか得られていないのは純粋に数学的な困難によるものではなく，より根

1) 弱到達不可能については次章を参照．

深い理由によるものであろうと説く．そしてこれらの問題を完全に解決するには，基本的概念と公理に関するより深い分析が必要だと述べている（解決の指針についてはつぎの (4) 節で説明されている）．そして直観主義を批判した後，ゲーデルは反復的集合観（つまり $\bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} V_\alpha$[2] を集合の宇宙としてとらえる集合観）からはどんなパラドクスも導かれていないことを述べている．連続体仮説のような命題が集合論の公理系から帰結するか否かという問題は，数理論理学によって記号の操作に関する純粋に組み合わせ論的問題へと変換することができる．こうした組み合わせ論的問題は最もラディカルな直観主義者でさえ有意味だと認めざるをえないだろうと，ゲーデルは主張する．

このように，連続体問題を解釈したときに三つの可能性が考えられる．連続体仮説は証明可能か，反証可能か，あるいは決定不能である．ゲーデルは連続体仮説はおそらく決定不能で，これがまさに連続体問題を解決するのが困難な理由であろうと予想する．そして連続体問題への挑戦として最も有望なものは，連続体仮説が集合論の公理系から独立していることを証明することであると説く（この時点ですでに「ZF[3]が無矛盾ならば ZFC に一般連続体仮説を加えた公理系も無矛盾である」ことはゲーデル自身によって証明されていた．しかしコーエンによって連続体仮説の独立性の証明が完成されるのは，ゲーデルが 1964 年版の本文を書き上げた直後のことである）．ところがゲーデルは「本論文で採用している観点に基づくと，現在受け入れられている集合論の諸公理からはカントールの予想が決定不能となることの証明は (例えば π の超越性の証明のような場合とは対照的に) 決して問題の解決とはならない」と説く．この観点とは何であろうか？ 「集合論的な諸概念と諸定理は何らかの十分に確定された実在 (well-determined reality) を記述しており，この実在においてはカントールの予想は真か偽のいずれかでなければならない，ということが導かれる」とゲーデルは述べて，集合の宇宙に関する考えを明示している．ゲーデルは続けて，

今日前提とされている諸公理からはこのカントールの予想が決定

2) 本書第 I 部 2.3 節の累積的階層を参照．

3) ZF はツェルメロ－フレンケル (Zermelo-Frankel) の公理系，ZFC は ZF に選択公理 (Axiom of Choice) を加えた公理系を意味する．

不能であるということは，単にそれらの公理がその実在について完全な記述を含んでいないということを意味しうるにすぎないのである．（中略）集合論の諸公理は決してそれ自体で閉じた体系を成しているのではなく，まったくその反対にそれらの公理の基礎となっている集合の概念そのものは，新しい公理によって拡張を行うよう促している

と説いている．どのような公理たちを集合論の公理系に加えるべきかについては，「そうした諸公理は，非常に大きな基数の存在（つまりそうした基数を持つ集合の存在）を主張する命題として定式化することができる」と述べている．このような公理たちが巨大基数公理と現在呼ばれているものであり，ZFC に巨大基数公理を加えて集合論を展開していくという研究の方針をわれわれはゲーデルのプログラム (Gödel's Program) と呼んでいる．ゲーデルは巨大基数公理が実数に関する命題にも影響を及ぼすと，つぎのように主張する．「これらの公理はまた，その直接の主題である非常に大きな超限数の領域 (domain) だけでなく，この領域からはるかに離れた領域にも様々な帰結を持つことが証明できる」．ここでゲーデルが使っている「領域 (domain)」という言葉は，V_α 階層においてそれぞれの集合が登場する階層と理解してよいであろう．

巨大基数たちは，自らが現れる階層のはるか下の階層の集合にも影響を及ぼすことが知られている．ここでゲーデルは巨大基数の例として強到達不可能基数 (strongly inaccessible cardinal) や，より大きいマーロ基数 (Mahlo cardinal) を紹介している．けれども「とはいえ，現在知られている原理に基づいて設定できる種々の無限公理によって，連続体仮説が解決されるという望みはほとんどない」（1947 年版）と告げる．これは「先に述べた連続体仮説の反証不可能性の証明は，これらの公理のどれを付け加えても，依然として何の変更もなく成り立つ」からである．ゲーデルは反証不可能性の証明について (4) 節でも触れている．反証不可能性の証明が到達不可能基数が存在しても成立できることは，のちほど 3.1 節で解説する．ここで興味深いことは，1964 年版では上の「現在知られている原理に基づいて設定できる種々の

無限公理」が「マーロの原理に基づいて設定できる種々の無限公理」に変更されている点である．これは 1964 年版執筆時にはゲーデルが可測基数から連続体仮説の反証が得られるかもしれないと考えていたからであろう．これに関しても第 3 章で解説する．どのようなものを公理として受け入れるべきかについて，以下の部分が示しているようにゲーデルは独自の考えをもっていた．

> 何らかの新しい公理が本来的に必然的なものかどうかを度外視しても，あるいは，そのような本来的必然性がまったくないという場合でさえも，その公理が真かどうかを蓋然的に決定することは別の仕方で可能である．つまり，その公理の「成功」を探求することにより帰納的に決定するのである．ここでの成功とは，帰結の面での実り豊かさということであり，とりわけ，次のような意味での「検証可能」な帰結が豊富に得られることである．すなわち，新しい公理なしでも証明できる諸帰結のうちに，新しい公理の助けを借りた方がずっと簡単に証明でき，証明自体はるかに発見しやすくなり，さらには，多くの別証明を一つの証明へと簡略化できるようになるものがあったならば，そのような帰結はまさに，新しい公理にとっての「検証可能」な帰結に他ならない．（中略）その公理の検証可能な帰結が非常に豊富で，当該の分野全体に大きな光をもたらし，大変に強力な問題解決の方法を与えてくれる（しかも，可能な限りそうした解決を構成的な仕方で与える）ので，たとえ本来的に必然的なものであろうとなかろうと，その公理を受け入れることができる——少なくとも，任意の十分に確立された物理的理論を受け入れることができるのと同じ意味で，受け入れることができる——というような，そうした公理が存在するかもしれないのである．

(4) 節では，ゲーデルは連続体仮説は通常の集合論の公理系からは決定不能だろうという予想の妥当性について語っている（上でも触れたが，ゲーデルは 1964 年版の本文を書き上げた直後にコーエンの結果について知ったと述

べている)．ゲーデルはこの予想が正しいと思われる理由を二つあげている．第一の理由は「まったく異なった仕方で定義される 2 つの集合のクラスが存在しており，しかも，そのどちらのクラスも，これまで設定されてきた集合論のすべての公理を充足する，という事実」だとする．ここで言及されている二つのクラスとは，ゲーデルが発見した構成可能集合のクラス L[4] とすべての集合を含む宇宙 V のことである．ゲーデルは 1938 年に構成可能集合のクラス L で連続体仮説が成立していることを証明した．もしも $V = L$（ゲーデルは公理 A と呼んでいる）を ZFC に公理として加えれば，連続体仮説を証明することができる．さらにこの結果を用いて ZF が無矛盾であれば ZFC に一般連続体仮説を加えても無矛盾であることを証明した．しかしその証明から V での連続体仮説の正否については何も分からない．コーエンがフィールズ賞を受賞したときにチャーチが行ったスピーチによると，1942 年にゲーデルは $V \neq L$ が ZFC と無矛盾であること（もちろん，ZFC が無矛盾だという仮定をして）を（有限）型理論 ((finite) type theory) を用いて証明していたという．二つのクラスの存在を理由にあげているのは，ゲーデルが連続体問題を解決するためには構成可能集合のクラス L を考察の対象とするかどうか決める必要があると考えていたからであろう．ゲーデルは 1947 年版にて「$V = L$（構成可能性公理）から一般連続体仮説が導ける」と述べた件の脚注において，「他方で，この公理[5] と何らかの意味で真っ向から対立する公理から，おそらくカントルの予想[6] の否定が導出できるであろう」と述べている．1964 年版の同じ部分の脚注は，よりくわしく「他方で，この公理と何らかの意味で対立する公理からは，おそらくカントールの予想の否定を導出できるであろう．私が考えているのは，あらゆる集合からなるシステム (the system of all sets) の何らかの最大性の性質を言明するような（幾何学におけるヒルベルトの完全性定理に類似した）公理である．これに対して，公理 A は最小性の性質を言明するものである」となっている[7]．これが書かれた時点では，どうやらゲーデルは ZFC に何らかの巨大基数公理を加えた公理

4) 本書第 I 部 4.1 節を参照．構成可能集合は構成的集合とも呼ばれている．
5) $V = L$.
6) 連続体仮説のこと．
7) この脚注については，3.1 節でも考察する．

系から連続体仮説は否定されると考えていたように見受けられる．

「連続体仮説は通常の集合論の公理系からは決定不能だろう」という予想が正しいと思われるもう一つの理由について，ゲーデルは連続体仮説からの帰結でおよそ真とは思えない命題たちの存在をあげている．最初にゲーデルがあげているのは，つぎの二つである．

(i) 濃度 $2^{\aleph_0}$ の実数の部分集合で，すべての完全集合上で第一類（2.1 節参照）になるものが存在する．
(ii) 濃度 $2^{\aleph_0}$ の実数の部分集合で，すべての $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への連続な全単射によって測度ゼロの集合へ送られるものが存在する．

残念ながら現在の研究者の多くは，この二つの命題やゲーデルがここであげている他の「およそ真とは思えない」命題について，ゲーデルがどうしてそれらが疑わしいと考えたか理解できないようである（たとえば [Martin 1976, p.87]）．ゲーデルは (4) 節の末尾近くで「連続体仮説の否定を含意する命題で真らしく思えるものが数多くあるのに反して，連続体仮説を含意する命題で真らしく思えるものがただのひとつも存在しないということは，（連続体仮説が誤りであるという）疑念を非常に深くさせる」と書いている．しかし「連続体仮説の否定を含意する命題で真らしく思える」命題たちがどんなものなのか，ゲーデルは何も語っていない．

ゲーデルは 1966 年の 9 月に「第 3 版での改訂 (Changes to be made in 3rd edition)」と名付けられた補足を書いている．これは 1964 年版が将来版を重ねるときのための準備として書かれたものである．そのなかでゲーデルは「コーエンの業績は（中略）集合論の基礎にとって公理化以降の最も大きな進歩である」と述べている．さらにコーエンが連続体仮説の独立性[8)]の証明に用いた強制法について，ゲーデルは「（強制法は）その他のいくつかの重要な独立性を示すのに使われている」と書いている．今日では強制法は集合論にとって最も重要な手法の一つになっており，無矛盾性/独立性の証明以外[9)]にも使われている．

8) 「独立性」の意味は，2.2 節を参照．
9) たとえば定理 4.1.

ここで引用した「カントルの連続体問題とは何か」の訳文は，[飯田 1995] の岡本賢吾氏によるものを使用させていただいた．また [Gödel 1990] の中のムーアによる [Gödel 1947; 1964] の解説が大変参考になったことを記しておく．

この章を終える前に，ゲーデルが「カントルの連続体問題とは何か」で触れていたいくつかのテーマをもう一度書きだしておく．これらのテーマはその後の集合論の発展に重要な役割を果たした．

(1) 実数の集合の性質
これは現在「記述集合論」として知られている分野である．

(2) 巨大基数公理
ゲーデルのプログラムのためだけでなく，巨大基数公理は現代集合論にとって不可欠な存在となっている．

(3) 内部モデルの理論
L のような内部モデルの研究は，集合論の宇宙の理解を深めるための重要な手法を提供してくれる．

(4) 基数の算術の問題
基数の算術の問題は強制法の登場によって解決されたわけではなく，今日でも驚くような結果が得られている．とくに $\aleph_\alpha^{cf(\aleph_\alpha)}$ の計算は中心的な課題である．

これから上の四つのテーマに沿って，ゲーデル以降[10]の集合論の発展について語っていこうと思う．この四つのテーマと強制法の手法は縦糸として複雑に交差しあい，現代の集合論のタピストリーを織りなしている．この四つのテーマ以外にも重要なテーマは多くあるし，集合論の発展の歴史はこれから述べる概説よりもはるかに豊かで複雑である．

10) とくにコーエン以降の話題を中心に述べていく．コーエンの業績については本書の第 I 部を参照していただきたい．

第2章

実数の集合の性質

2.1　射影集合の正則性

ゲーデル [Gödel 1947; 1964] が触れていた「もし $X \subseteq \mathbb{R}$ が解析集合であれば，$|X| \leq \aleph_0$ か $|X| = 2^{\aleph_0}$ のいずれかが成立する」という命題について考えてみよう．実数の集合の性質を考えるときに，$\mathbb{R}^n$ の部分集合たちを複雑さで階層化して考えることが有効である．最も単純な $\mathbb{R}^n$ の部分集合として開集合と閉集合が考えられる．つぎに $\mathbb{R}^n$ のすべての開集合を含んでいて，可算個の和集合をとる操作と $\mathbb{R}^n$ での補集合をとる操作に対して閉じている最小の集合族を考えてみる．この族に属しているものを $\mathbb{R}^n$ のボレル集合と呼ぶ．ここでつぎのように $\mathbb{R}^n$ の部分集合の階層を考えてみよう．

定義 2.1　$X \subseteq \mathbb{R}^m$ に対し，

$$X \in \mathbf{\Sigma}^1_1 \iff \text{ボレル集合 } F \subseteq \mathbb{R}^{m+1} \text{が存在して}$$
$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : \exists y \in \mathbb{R} \langle \vec{x}, y \rangle \in F\} = X,$$
$$X \in \mathbf{\Pi}^1_1 \iff \mathbb{R}^m - X \in \mathbf{\Sigma}^1_1$$

と定義する．つまりボレル集合の射影 (projection) として与えられる集合全体を $\mathbf{\Sigma}^1_1$ と呼び，$\mathbf{\Sigma}^1_1$ に属する集合の補集合たちが与える集合全体を $\mathbf{\Pi}^1_1$ と呼

ぶ．そして帰納的に $\mathbf{\Pi}^1_n$ に属する集合の射影が $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$ を与え，$\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$ に属する集合の補集合が $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$ を与えるとする．つまり

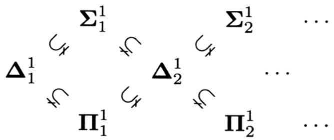
$$\begin{aligned} X \in \mathbf{\Sigma}^1_{n+1} &\iff \mathbf{\Pi}^1_n \text{集合 } F \subseteq \mathbb{R}^{m+1} \text{が存在して} \\ &\qquad \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m \colon \exists y \in \mathbb{R} \langle \vec{x}, y\rangle \in F\} = X, \\ X \in \mathbf{\Pi}^1_{n+1} &\iff \mathbb{R}^m - X \in \mathbf{\Sigma}^1_{n+1} \end{aligned}$$

と定義する．さらに

$$\mathbf{\Delta}^1_n = \mathbf{\Sigma}^1_n \cap \mathbf{\Pi}^1_n$$

とする．

これらの $\mathbf{\Delta}^1_n$, $\mathbf{\Sigma}^1_n$，$\mathbf{\Pi}^1_n$ はつぎのような階層をなしている．



この階層を射影階層と呼び，そこに登場する $\mathbb{R}^m$ の部分集合を射影集合と呼ぶ．スースリンは $\mathbf{\Delta}^1_1$ がちょうどボレル集合と一致していることを証明した．また $\mathbf{\Sigma}^1_1$ はポテンシャル論や確率論に登場する解析集合の族になっている．このように上の図で右に行くにしたがって，実数のより複雑な集合が現れてくる．

「すべての $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合は高々可算か $2^{\aleph_0}$ という濃度をもつ」という命題はつぎの性質を使って証明される．

定義 2.2 空ではない孤立点をもたない閉集合を完全集合 (perfect set) と呼び，$X \subseteq \mathbb{R}^n$ が可算か完全集合を部分集合としてもつとき X は完全集合の性質 (perfect set property) を満たすという．

$\mathbb{R}^n$ のすべての完全集合が $\mathbb{R}^n$ 全体と同じ濃度（つまり $2^{\aleph_0}$）をもっていることから，完全集合の性質を満たす $\mathbb{R}^n$ の部分集合は可算か $2^{\aleph_0}$ という濃度をもつことが明らかである．そのような理由でつぎの問題はわれわれにとって興味深いものである．

問題 1　$\mathbb{R}^n$ のどんな部分集合が完全集合の性質を満たすのか？

上の問題はつぎの二つの問題とともに実数に関する集合論の重要な課題であった．

問題 2　$\mathbb{R}^n$ のどんな部分集合がルベーグ可測か？

問題 3　$\mathbb{R}^n$ のどんな部分集合がベールの性質を満たすのか？

$X \subseteq \mathbb{R}^n$ に対し $X \triangle O (= (X - O) \cup (O - X))$ が第一類集合（内点のない閉集合の可算和に含まれる集合）となる開集合 O が存在するときに，X はベールの性質を満たすという．

開集合たちが完全集合の性質とルベーグ可測性とベールの性質を満たしていることは明らかである．さらにルベーグ可測な部分集合たちの族とベールの性質を満たしている部分集合たちの族は，それぞれ可算個の和集合をとる操作と補集合をとる操作に対して閉じているので，すべてのボレル集合がルベーグ可測でベールの性質を満たしていることも分かる．上の三つの性質のように，ボレル集合などのシンプルな実数の集合が満たしている数学者にとって望ましい性質を総称して正則性 (regularity) と呼ぶことがある．その三つの性質を満たさない実数の集合の例は，それぞれ選択公理を使うことによって得られることが知られている．それでは射影階層のどのレベルまで，上の三つの性質がそれぞれ成立するのであろうか？　つぎの定理はこの問題についての古典的結果である．

定理 2.3　$\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合に関して，つぎが成り立つ．

(1) すべての $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合はルベーグ可測である（その結果，すべての $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合もルベーグ可測である）．
(2) すべての $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合はベールの性質を満たす（その結果，すべての $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合もベールの性質を満たす）．
(3) すべての $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合は完全集合の性質を満たす．

(1) はルージン，(2) はルージンとシルピンスキーの得た結果である．(3) はススリンの結果であり，これによってすべての解析集合（$=\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合）が高々可算か $2^{\aleph_0}$ という濃度をもっていることが分かる．彼らの研究がのちに記述集合論と呼ばれる分野へと発展することになる．しかし彼らは上の問題について定理 2.3 を拡張することができなかった．つまり「すべての $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合が完全集合の性質を満たすか?」などの問題は未解決のまま残された．

現在のわれわれの視点から眺めると，記述集合論の創始者たちがぶつかった壁と連続体問題に取り組んでいたカントルのぶつかった壁が同じ性質のものだったことが分かる．というのは彼らがともに，集合論の公理系（ツェルメロ・フレンケルの公理系 + 選択公理）からは解決できない問題に，答えようとしていたということである．これからはツェルメロ・フレンケルの公理系を ZF と記す．また選択公理 (Axiom of Choice) を AC と表記することもある．ZFC は ZF + AC を示す．

[Gödel 1938] においてゲーデルは，もし ZF が無矛盾 (consistent) なら (ZFC +一般連続体仮説) も無矛盾であることを示した．これを

$$\text{Con (ZF)} \longrightarrow \text{Con (ZFC + 一般連続体仮説)}$$

と書くことにする．これより ZF が無矛盾ならば，ZFC から連続体仮説を否定することが不可能なことが分かった．ゲーデルはこの定理の証明で「構成可能」という概念を定義し，構成可能な集合のクラス（これを通常 L と記す）では (ZFC + 一般連続体仮説) が成立していることを示した．上で触れたように，選択公理を使うことによって正則性を満たさない実数の集合の例を得ることができる．ゲーデルは L の中によい性質をもった複雑さが $\mathbf{\Delta}^1_2$ となっている実数の整列順序 (good $\mathbf{\Delta}^1_2$ well-ordering of reals)[1)] が存在することに気付いた．この整列順序を用いて以下の定理が示される．

定理 2.4　L の中では，つぎが成り立つ．

(1)　完全集合の性質を満たさない $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合が存在する．

1)　本書第 I 部の (4.11) の $\leq_L$ を参照．また，good $\mathbf{\Delta}^1_2$ well-ordering of reals については [Kanamori 1994 邦訳] を参照．

(2) ルベーグ可測ではなくベールの性質も満たさない $\mathbf{\Delta}^1_2$ 集合が存在する．

L は ZFC のモデルになっているので，この定理によって Con (ZF) $\longrightarrow$ Con (ZFC +「完全集合の性質を満たさない $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合が存在する」+「ルベーグ可測ではなくベールの性質も満たさない $\mathbf{\Delta}^1_2$ 集合が存在する」) が証明されたことになる．つまり ZFC からは，すべての $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合が完全集合の性質を満たすことや $\mathbf{\Delta}^1_2$ 集合すべてがルベーグ可測性やベールの性質を満たすことは（ZF が矛盾していないかぎり）証明できない．定理 2.4 の証明を一般化して，よい性質をもっていて射影階層に登場する実数の整列順序があれば正則性を満たさない射影集合が存在することが示される．

さてつぎに考えたくなるのは，「公理系 ZFC だけから正則性を満たさない射影集合の存在を証明できるか？」という問題である．とくに「ZFC だけから完全集合の性質を満たさない $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合の存在やルベーグ可測性やベールの性質を満たさない $\mathbf{\Delta}^1_2$ 集合が導けるか？」という問題である．これについてはマーティンとソロヴェイのつぎの結果が知られている．

定理 2.5（[Martin and Solovay 1970]） もし ZF が無矛盾であれば，(ZFC +「すべての $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合はルベーグ可測でベールの性質を満たす」) も無矛盾である．

$\mathbf{\Delta}^1_2 \subseteq \mathbf{\Sigma}^1_2$ なので定理 2.4 と定理 2.5 より，「すべての $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合はルベーグ可測でベールの性質を満たす」という命題は公理系 ZFC から独立していることが分かった．つぎの節で述べるように $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合の完全集合の性質に関しては，状況はもう少し複雑である．

この節では実数の集合に関して話を進めてきたが，ここで述べる実数の集合についての結果は，すべて任意の完全ポーランド空間（孤立点をもたない可分な完備距離空間）で成立する．これはすべての完全ポーランド空間が互いにボレル同型（ボレル性を保存する全単射が存在する）ということを使えばよい．集合論では通常の実数よりもベール空間と呼ばれる完全ポーランド空間がよく用いられる．ベール空間は普通 $\mathcal{N}$ で示され，つぎのように定義できる．

定義 2.6 $\mathcal{N}$ は自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への関数全体とする．$\mathbb{N}$ に離散位相を入れ，$\mathcal{N}$ を可算個の $\mathbb{N}$ の直積とみる．そして $\mathcal{N}$ に積位相を入れる．

実数とベール空間以外にもいろいろな空間が完全ポーランド空間となっている．たとえば，$C[0,1]$ と L^p 空間が完全ポーランド空間となることはよく知られている．一見すると射影階層には単純な集合しか登場しないようにみえる．しかし実は解析学で現れる完全ポーランド空間での集合のほとんどは，射影階層の最初の 1，2 層に現れることが分かっている．ここで解析学に関係する射影集合の例を二つあげておく．

(1) $\{f \in C[0,1] : f$ が平均値の定理を満たす $\}$ はウッディンによって $\mathbf{\Pi}^1_2$ であることが示されている．

(2) $\{f \in L^p[0,2\pi] : f$ のフーリエ展開が至るところ収束する $\}$ (ただし $p \geq 1$) はアイタイとケクリスによって $\mathbf{\Pi}^1_1$ であることが示されている．

解析やトポロジーでの射影集合の例は [Becker 1992] を参照していただきたい．

2.2　ソロヴェイの定理

1963 年にコーエンは，ZF が矛盾していなければ (ZFC +「連続体仮説の否定」) と (ZF +「選択公理の否定」) はともに無矛盾であることを証明した．このときにコーエンが用いた手法が強制法 (forcing method)[2] である．このコーエンの結果とゲーデルの定理（ZF が無矛盾ならば，(ZFC +「連続体仮説」) も無矛盾）から連続体仮説の正否は公理系 ZFC のもとでは決定できないことが分かった．これを「連続体仮説の ZFC からの独立性」と呼ぶ．

定義 2.7　T を集合論の命題の集合とし，φ を集合論の命題とする．もし $(T + \varphi)$ と $(T +$「φ の否定」$)$ がともに無矛盾ならば，φ は T より独立している (independent) という．

連続体仮説が公理系 ZFC より独立していることや，選択公理が公理系 ZF より独立していることがゲーデルとコーエンの定理から示された．コーエンの強制法はその後ソロヴェイらによって一般化され，数年間のうちに集合論

2)　本書第 I 部の 4.2 節を参照せよ．

の未解決問題の多くが ZFC から独立していることが証明された．前章で述べたようにゲーデル [Gödel 1947] は，ZFC において決定不能な命題（つまり ZFC から独立している命題）を ZFC に新たな公理を加えた公理系のもとで考察することを提唱した．そこで "strong axiom of infinity" とゲーデルが呼んでいた新しい公理（その当時は数種類しか知られていなかった）は，のちにその数を増やし巨大基数公理 (large cardinal axioms) と呼ばれるようになっていった．一般に巨大基数公理は超越的（あいまいな表現だが）に大きい基数の存在という形をとる．巨大基数を付け加えることにより公理系 ZFC はより強い無矛盾性を得る．ここでいくつかの用語について解説しておこう．

定義 2.8 T と S をそれぞれ公理系 ZF に有限個の集合論の命題を加えて得られるものとする．もし T と S の無矛盾性が同値 ($\mathrm{Con}\,(T) \longleftrightarrow \mathrm{Con}\,(S)$) となることが示されるならば[3]，$T$ と S は同じ無矛盾性の強さをもつ (equiconsistent) という．

ゲーデルの定理 $\mathrm{Con}\,(\mathrm{ZF}) \longrightarrow \mathrm{Con}\,(\mathrm{ZFC}+$「連続体仮説 $(2^{\aleph_0} = \aleph_1)$」$)$ と $\mathrm{Con}\,(\mathrm{ZF}) \longrightarrow \mathrm{Con}\,(\mathrm{ZFC}+$「完全集合の性質を満たさない $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合が存在する」$+$「ルベーグ可測ではなくベールの性質も満たさない $\mathbf{\Delta}^1_2$ 集合が存在する」$)$ より，ZF と (ZFC＋「連続体仮説」) と (ZFC＋「完全集合の性質を満たさない $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合が存在する」＋「ルベーグ可測ではなくベールの性質も満たさない $\mathbf{\Delta}^1_2$ 集合が存在する」) は同じ無矛盾性の強さをもつことが分かる[4]．当然 ZFC も ZF と同じ無矛盾性の強さをもっている．またコーエンの定理と前節で触れたマーティンとソロヴェイの定理（定理 2.5）より，ZF, (ZFC＋「$2^{\aleph_0} = \aleph_2$」)，(ZFC＋「すべての $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合はルベーグ可測でベールの性質を満たす」) も同じ無矛盾性の強さをもっている．

定義 2.9 T と S をそれぞれ公理系 ZF に有限個の集合論の命題を加えて得られるものとする．もし T より S の無矛盾性が導かれれば ($T \vdash \mathrm{Con}(S)$)，T は S より無矛盾性の意味でより強いという．

3) より正確には，この同値性が ZF（あるいはより弱い公理系）で証明できるならば．

4) $\mathrm{Con}\,(\mathrm{ZFC}+$「連続体仮説」$) \longrightarrow \mathrm{Con}\,(\mathrm{ZF})$ ならびに $\mathrm{Con}\,(\mathrm{ZFC}+$「完全集合の性質を満たさない $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合が存在する」$+$「ルベーグ可測ではなくベールの性質も満たさない $\mathbf{\Delta}^1_2$ 集合が存在する」$) \longrightarrow \mathrm{Con}\,(\mathrm{ZF})$ は自明.

もし T と S が ZF を含む無矛盾で再帰的 (recursive)[5] な公理系と仮定すると，T と S が同じ無矛盾性の強さをもっているのならば T から S の無矛盾性を導くことはゲーデルの第二不完全性定理により不可能である．

巨大基数たちはいろいろな形で定義されるが，すべてに共通していることは公理系 ZFC に巨大基数公理（巨大基数の存在を主張する公理）を加えることによって無矛盾性の意味でも強くなることである．つまり (ZFC＋巨大基数公理) から ZFC の無矛盾性 (Con (ZFC)) を証明することができる．そして巨大基数公理たちの間にも無矛盾性の意味で強弱がある．最も無矛盾性の意味で弱い巨大基数は，つぎに紹介する到達不可能基数である．

定義 2.10　基数 κ はつぎの条件を満たすときに到達不可能基数と呼ばれる．

(1)　$\kappa > \aleph_0$；
(2)　κ は正則；
(3)　もし λ が κ 未満の基数ならば，λ のベキ集合の濃度も κ 未満である．

「到達不可能基数の存在」は巨大基数公理である．もし κ が到達不可能基数であれば V_κ は ZFC のモデルになる[6]．これによって (ZFC＋「到達不可能基数の存在」) から ZFC の無矛盾性が導ける．到達不可能基数の定義の (3) を「(3)′ もし λ が κ 未満の基数ならば，λ^+（λ のつぎの基数）も κ 未満である」に換えることによって，弱到達不可能基数を定義することができる．一般連続体仮説を仮定すれば，到達不可能基数と弱到達不可能基数は同じものである．そのことより弱到達不可能基数は構成可能集合の宇宙 L の中では到達不可能基数にみえている．これによって弱到達不可能基数と到達不可能基数が同じ無矛盾性の強さをもっていることが分かる．

集合論の命題で，それ自体は巨大基数の存在を要請しないが，その無矛盾性の強さにおいて巨大基数公理のような強さをもつものも広い意味での巨大基数公理と考えることができる．つぎの定理が示すように，実は「すべての

---

5)　命題の集まり T が再帰的とは，T に属する命題たちのゲーデル数の集合が再帰的であることを意味する．

6)　[Kunen 1980] や [Kanamori 1994 邦訳] などの集合論のテキストを参照していただきたい．

$\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合が完全集合の性質を満たす」もそのような命題である．

定理 2.11（[Solovay 1969]） もし (ZFC +「すべての $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合が完全集合の性質を満たす」) が無矛盾ならば，(ZFC +「到達不可能基数が存在する」) も無矛盾である．

定理 2.11 の証明は $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合が完全集合の性質を満たしているとき，$\aleph_1$ が構成可能集合のクラス L の中で到達不可能基数になっていることで与えられる．

さらにつぎに述べる定理により，(ZFC +「すべての $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合が完全集合の性質を満たす」) と (ZFC +「到達不可能基数が存在する」) は同じ無矛盾性の強さをもつことが分かる（定理 2.13 を参照）．ソロヴェイは 1964 年に，それ以降の集合論の流れを変えたつぎの定理を証明した．

定理 2.12（[Solovay 1970]） もし (ZFC +「到達不可能基数の存在」) が無矛盾ならば，つぎの (1) と (2) はそれぞれ無矛盾である．

(1) ZFC +「すべての射影集合はルベーグ可測でベールの性質と完全集合の性質を満たす」．

(2) ZF + 従属選択の公理 +「実数の集合はすべてルベーグ可測でベールの性質と完全集合の性質を満たす」．

従属選択の公理 (Axiom of Dependent Choices) とは選択公理を弱くしたものである．それは選択公理よりも真に弱いが，古典的解析学における選択公理の応用の多くは従属選択の公理で十分なことが知られている．定理 2.12 の証明にはレヴィ崩壊 (Levy collapse) と呼ばれている強制法が用いられた．このレヴィ崩壊では到達不可能基数より下にある基数はすべて可算化され，元の到達不可能基数は強制法で拡張されたモデルの $\aleph_1$ となる．このようにして得られる ZFC のモデルでは，すべての射影集合はルベーグ可測でベールの性質と完全集合の性質を満たしている．(2) を示すためには，到達不可能基数をレヴィ崩壊した後，さらにこのジェネリック拡大の中である内部モデル（たとえば $L(\mathbb{R})$[7]）について考える．この内部モデルが (2) を満たすことになる．

7) $L(\mathbb{R})$ については 3.5 節で解説する．

定理 2.11 によれば，Con (ZFC +「すべての $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合が完全集合の性質を満たす」) を得るためには，到達不可能基数の無矛盾性の強さが必要であるが，つぎの定理が示すように $\mathbf{\Sigma}^1_3$ 集合のルベーグ可測性についても同様なことがいえる．

定理 2.13　つぎの (1)–(5) は同じ無矛盾性の強さをもっている．

(1) ZFC +「到達不可能基数の存在」.
(2) ZFC +「すべての $\mathbf{\Sigma}^1_3$ 集合はルベーグ可測である」.
(3) ZFC +「すべての $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合が完全集合の性質を満たす」.
(4) ZF + 従属選択の公理 +「実数の集合はすべてルベーグ可測である」.
(5) ZF + 従属選択の公理 +「実数の集合はすべて完全集合の性質を満たす」.

Con((2))⟶Con((1)) と Con((4))⟶Con((1)) はシェラ[8)][Shelah 1984] の結果，その他はソロヴェイ [Solovay 1969; 1970] の結果である．このように射影階層のあるレベル以上でのルベーグ可測性や完全集合の性質は，「到達不可能基数の存在」と同等の無矛盾性の強さをもっている．面白いことにベールの性質についてはそのようなことがいえないことが，つぎのシェラの定理によって知られている．

定理 2.14（[Shelah 1984]）　(1)–(3) は同じ無矛盾性の強さをもっている．

(1) ZFC.
(2) ZFC +「すべての射影集合はベールの性質を満たす」.
(3) ZF + 従属選択の公理 +「実数の集合はすべてベールの性質を満たす」.

定理 2.12 は巨大基数公理が「射影階層のどのレベルまで，ルベーグ可測性とベールの性質と完全集合の性質がそれぞれ成立するのであろうか？」という問題に対し，巨大基数公理が「可能な答え」を与えることを示した．つぎの章では巨大基数公理が「必然的な答え」を与えることをみる．

つぎの章に移る前に，無矛盾性の強さの比較の方法について述べておく．多くの場合無矛盾性の強さを比べるために使われているのは，強制法か内部

8)　第 I 部のように，シェラハと表記されることもある．

モデルのいずれかである．Ψ と Θ を集合論の命題とする．もし ZFC $+\,\Psi$ のモデルを強制法で拡大して ZFC $+\,\Theta$ のモデルを得ることができれば，Con (ZFC $+\,\Psi$) $\longrightarrow$ Con (ZFC $+\,\Theta$) が示される．コーエンの連続体仮説の否定の無矛盾性の証明やソロヴェイの定理（定理 2.12）の (1) はこの例である．また ZFC $+\,\Psi$ または ZF $+\,\Psi$ のモデルにおいて内部モデルをつくり，ZFC $+\,\Theta$ または ZF $+\,\Theta$ のモデルが得られるときも，Con (ZF (C) $+\,\Psi$) $\longrightarrow$ Con (ZF (C) $+\,\Theta$) が示される．ゲーデルの選択公理や連続体仮説の無矛盾性の証明や定理 2.11 の証明はこの例である．またソロヴェイの定理の (2) の証明のように強制法と内部モデルを両方使う場合もある．内部モデル論を使った無矛盾性の強さの比較法は，近年の集合論の中心的課題の一つであり多くの重要な成果をあげている．これについては 3.5 節で述べることにする．

このような手法で集合論の命題を無矛盾性の強さで比べていくと，それらの多くがすでに知られている巨大基数のいずれかと同じ強さになることが分かる．またこのような方法で新たな巨大基数が発見されることもある．ちょうど同じ強さの巨大基数が得られていない命題に対しても，その無矛盾性の強さの上限や下限を巨大基数が与えてくれている．このように巨大基数たちは，集合論の命題の無矛盾性の強さを測る目盛りの役割を果たしている．

第3章
巨大基数

3.1　可測基数

第1章で述べたように，[Gödel 1947; 1964] においてゲーデルは集合論の公理系 ZFC に巨大基数公理たちを加えて集合論を展開していくことを提唱した（ゲーデルのプログラム）．巨大基数公理を加えることによって，ZFC から独立している命題の正否を決定しようと考えたわけである．ZFC のもとでは正否を決定できないそれらの命題の正否を決定する公理が存在することが，実は知られている．その公理はゲーデルが公理 A (Axiom A) と呼んでいたもので，現在では構成可能性公理 (Axiom of Constructibility) と呼ばれている．構成可能性公理は「すべての集合は構成可能である」という主張である．つまりすべての集合のクラス V は構成可能集合のクラス L と等しいということなので，構成可能性公理は通常 $V = L$ という形で記される．

ゲーデルは自らが見いだした $V = L$ を公理系 ZFC に迎え入れて集合論を展開するよりも，巨大基数公理を加えることを主張した．ゲーデルは [Gödel 1964] の (4) 節の脚注でつぎのように述べている．

> 他方で，この公理[1] と何らかの意味で対立する公理からは，お

1)　公理 A，つまり構成可能性公理 $V = L$.

そらくカントールの予想[2)]の否定を導出できるであろう．私が考えているのは，あらゆる集合からなるシステム (the system of all sets)[3)]の何らか最大性の性質 (maximum property) を言明するような（幾何学におけるヒルベルトの完全性定理に類似した）公理である．これに対して，公理 A は最小性の性質 (minimum property) を言明するものである．註 (14) で説明した集合の概念と調和するように思われるのは，もっぱら最大性の性質のみであるということに留意されたい．

註 (14) とはゲーデルが [Gödel 1964] の (3) 節で「$\cdots$ の集合 (set of) 」という操作を反復的に適用する (iterated application) によってすべての集合が与えられているという集合観について述べている所の註である．構成可能性公理を仮定すると「$\cdots$ の集合 (set of) 」という操作で与えられる集合たちが，ある意味において最小となる．これについては本書の第 I 部第 4 章を参照していただきたい．

ZFC に付け加える公理が (ZFC + 構成可能性公理) から導ける結論（たとえば連続体仮説や完全集合の性質を満たさない $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合の存在やルベーグ可測ではない $\mathbf{\Delta}^1_2$ 集合の存在）のいずれかを否定するようなものであったら，そのような公理と構成可能性公理は ZFC のもとで両立できない．つぎの定理により，到達不可能基数の存在は構成可能性公理と両立できることが分かる．

定理 3.1 もし (ZF +「弱到達不可能基数の存在」) が無矛盾ならば，(ZFC +「構成可能性公理」+「到達不可能基数の存在」) も無矛盾である．

この定理の証明の基本的なアイデアを述べておく．(ZF +「弱到達不可能基数の存在」) の推移的 (transitive) なモデル M が与えられているとき，M 内で構成可能な集合の宇宙 L^M を考える．この L^M が (ZFC + 構成可能性公理 +「到達不可能基数の存在」) のモデルになっていることより，上の定理が証明できる[4)]．

2) 連続体仮説．
3) V のことだと思われる．
4) 正確には上の議論で定理 3.1 を証明するためには，(ZF +「弱到達不可能基数の存

上の定理から，(ZFC + 「到達不可能基数の存在」) からは「連続体仮説の否定」や「すべての $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合は完全集合の性質を満たす」や「すべての $\mathbf{\Delta}^1_2$ 集合はルベーグ可測」を導くことはできないことが分かった．

それでは構成可能性公理と両立できないような巨大基数は知られているのであろうか？　スコット [Scott 1961] は可測基数が構成可能性公理と両立できないことを示した．ここで可測基数を定義するための準備をする．

定義 3.2　F が集合 X の部分集合たちからなる集合で以下の性質 (1)–(3) を満たすときに，F は X 上のフィルター (filter over X) という．

(1) $\emptyset \notin F$, $X \in F$.

(2) $A \subseteq B \subseteq X$ かつ $A \in F$ ならば $B \in F$.

(3) $A \in F$ かつ $B \in F$ ならば $A \cap B \in F$.

さらにつぎの性質 (4) を満たすときに，F は X 上の超フィルター (ultrafilter over X) と呼ばれる．

(4) すべての $A \subseteq X$ に対し，$A \in F$ または $X - A \in F$ が成立する．

X 上のフィルターの例を，二つあげてみよう．X を無限集合とする．

例 1　c を X の任意の要素としたとき，$F = \{A \subseteq X : c \in A\}$ は X 上のフィルターになっている．この F を（c によって生成される）X 上の単項フィルター (principal filter over X) と呼ぶ．単項フィルターは超フィルターになっている．単項フィルター以外のフィルターを非単項フィルター (non-principal filter) と呼ぶ．

例 2　$F = \{Y \subseteq X : X - Y \text{ は有限}\}$ を無限集合 X 上のフレシェ・フィルター (Fréchet filter over X) と呼ぶ．

定義 3.3

(1) λ を任意の基数とする．つぎの条件を満たすとき X 上のフィルター F は λ 完備という．任意の $\gamma < \lambda$ と $\{A_\alpha : \alpha < \gamma\} \subseteq F$ に対し，

在」) を集合論の命題の集まりとしてみて，その任意の有限な部分のモデル M に対して上の議論をする必要がある．

$\bigcap_{\alpha<\gamma} A_\alpha \in F$. F が $\aleph_1$ 完備のときは例外的に，F は可算完備という．

(2) 以下の条件を満たすとき，X 上のフィルター F は自明ではない (non-trivial) という．すべての $a \in X$ に対し，$X - \{a\} \in F$.

X 上の単項フィルターはどんな基数 λ に対しても，λ 完備となっている．フレシェ・フィルターは可算完備になれない．また自明ではないフィルターは単項フィルターではない．フィルターと対をなす概念としてイデアルが知られている．

定義 3.4 I が集合 X の部分集合たちからなる集合で以下の性質 (1)–(3) を満たすときに，I は X 上のイデアル (ideal over X) という．

(1) $\emptyset \in I$, $X \notin I$.
(2) $A \subseteq B \subseteq X$ かつ $B \in I$ ならば $A \in I$.
(3) $A \in I$ かつ $B \in I$ ならば $A \cup B \in I$.

さらにつぎの性質 (4) を満たすときに，X 上イデアル I は自明ではない (non-trivial) という．

(4) すべての $a \in X$ に対し，$\{a\} \in I$.

定義 3.5 X 上のイデアル I は以下の条件を満たすとき，正規イデアル (normal ideal) と呼ばれる．任意の関数 $g : X \to \bigcup X$ に対し，もし $\{a \in X : g(a) \in a\} \notin I$ ならば $\{a \in X : g(a) = b\} \notin I$ となる $b \in \bigcup X$ が必ず存在する．

もし F が X 上のフィルターだとすると，$I_F = \{A \subseteq X : X - A \in F\}$ は X 上のイデアルになる．この I_F を F の双対イデアル (dual ideal of F) と呼ぶ．同様に X 上のイデアル I に対し，$F_I = \{A \subseteq X : X - A \in I\}$ は X 上のフィルターとなり I の双対フィルター (dual filter of I) と呼ぶ．

定義 3.6 F と I をそれぞれ X 上のフィルターとイデアルとする．

(1) もし双対フィルター F_I が λ 完備になっているならば，イデアル I も λ 完備になっているという．

(2) もし双対イデアル I_F が正規イデアルになっているならば，フィルター F も正規フィルターになっているという．

(3) 任意の $i \in \bigcup X$ に対し，$\{a \in X : i \in a\} \in F$ ならばフィルター F は良好 (fine) であり，$\{a \in X : i \notin a\} \in I$ ならばイデアル I は良好であるという．

われわれが扱っていくフィルターとイデアルはすべて良好かつ自明ではないので，これ以降フィルター/イデアル/超フィルターというときは良好かつ自明ではないフィルター/イデアル/超フィルターを意味することにする．

X 上のフィルター F は X の何らかの意味で「大きな」部分集合の集まり，X 上のイデアル I は X の「小さな」部分集合の集まりと考えることができる．

ここでいよいよ可測基数を定義する．

定義 3.7 基数 $\kappa > \aleph_0$ 上に κ 完備な超フィルターが存在するときに，κ は可測基数と呼ばれる．

つぎの定理より可測基数が巨大基数であることはすぐに分かる．

定理 3.8 可測基数は到達不可能基数である．

証明 F を基数 $\kappa > \aleph_0$ 上の κ 完備な超フィルターとする．フィルター F は自明ではないので，すべての $\alpha < \kappa$ に対し $\kappa - \{\alpha\} \in F$. これと F の κ 完備性より，もし X が濃度 κ 未満な κ の部分集合だったら $\kappa - X \in F$ が分かる．κ が κ 未満個のそれぞれ濃度 κ 未満な部分集合たち $\langle X_\alpha : \alpha < \gamma \rangle$, $\gamma < \kappa$ に分割できたとすると，$\kappa - X_\alpha \in F$ となり，κ 完備性より $\bigcap_{\alpha<\gamma} \kappa - X_\alpha \in F$, つまり $\kappa - \bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha \in F$ となってしまうが $\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha = \kappa$ なので矛盾．ゆえに κ は正則基数でなければならない．λ を κ 未満の任意の基数として，$2^\lambda < \kappa$ を示したい．ここで $2^\lambda \geq \kappa$ と仮定してみる．この仮定より集合 $\{f : f$ は λ から $\{0,1\}$ への関数$\}$ の濃度は κ 以上である．そこで G を κ から $\{f : f$ は λ から $\{0,1\}$ への関数$\}$ への単射とする．F が超フィルターなので，$\beta < \lambda$ に対し $\{\alpha \in \kappa : G(\alpha)(\beta) = 0\} \in F$ か $\{\alpha \in \kappa : G(\alpha)(\beta) = 1\} \in F$ のいずれか一つが成立する．そこで i_β を $\{\alpha \in \kappa : G(\alpha)(\beta) = i_\beta\} \in F$ と

なる $\{0,1\}$ の要素とし，$\{\alpha \in \kappa : G(\alpha)(\beta) = i_\beta\}$ を X_β と呼ぶことにする．κ 完備性より $\bigcap_{\beta<\lambda} X_\beta \in F$ となるが，G が単射だったので $\bigcap_{\beta<\lambda} X_\beta$ の要素は高々1 個である．これは F が自明ではないという仮定と矛盾するので，$2^\lambda < \kappa$ が示された． ■

可測基数は無矛盾性の意味で，到達不可能基数よりもずっと強いことが知られている．つぎの定理は可測基数のもとに多くの到達不可能基数が存在することを示している．

定理 3.9　κ が可測基数であれば，$|\{\alpha < \kappa : \alpha$は到達不可能基数$\}| = \kappa$.

この定理の証明は，3.2 節で与える．κ が可測基数ならば V_κ は ZFC のモデルとなり，上の定理よりつぎの系が得られる．

系 3.10　(ZFC +「可測基数が存在する」) から (ZFC +「到達不可能基数が非有界 (unbounded) に存在する」)[5] の無矛盾性が導ける．

ソロヴェイは可測基数の存在が射影集合の正則性に直接的に影響をおよぼすことをつぎの定理により示した．

定理 3.11（[Solovay 1969]）　(ZFC +「可測基数が存在する」) のもとでは，すべての $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合はルベーグ可測でベールの性質と完全集合の性質を満たす．

3.3 節で述べるように，この定理は仮定を弱くすることができる．ゲーデルの結果により，構成可能性集合の宇宙 L の中では，完全集合の性質を満たさない $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合やルベーグ可測ではなくベールの性質も満たさない $\mathbf{\Delta}^1_2$ 集合の存在が示されていたので，上の定理は可測基数が構成可能性公理 $(V = L)$ と ZFC のもとで両立できないことを示している．定義 3.2 の前で述べたように，可測基数から $V \neq L$ を最初に導いたのはスコットである．彼の証明は超ベキ (ultrapower) による初等的埋め込み (elementary embedding) を用いたもので，その後の集合論の研究に，大きな影響を与えた．このスコットの証明については，つぎの節で解説する．

5) 「到達不可能基数が非有界に存在する」とは，任意の順序数 α に対し $\kappa > \alpha$ となる到達不可能基数 κ が存在するという意味である．

ここで可測基数の歴史について触れておく．1930 年頃，ポーランド学派の数学者たちは測度に関するつぎの問題について研究していた．

バナッハの問題 ([Banach 1930])

集合 X が与えられたとする．そのとき以下の性質を満たす関数 $m : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ は存在するか？

(1) $m(X) = 1$;

(2) すべての $a \in X$ に対し，$m(\{a\}) = 0$;

(3) もし $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ が互いに交わらないならば，$m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(Y_n)$.

これは X のすべての部分集合 Y に対し $[0,1]$ 内の実数値 $m(Y)$（Y の「測度」）を対応させて上の (1)–(3) を満たすようにできるかという，測度の存在に関する問題である．これ以降，「X 上の測度」という言葉によりバナッハの問題でその存在が問われている関数を指すことにする．バナッハの問題における集合 X については，その濃度のみが重要である．X が可算集合のときは，明らかにこのような測度は存在しない．バナッハとクラトウスキ [Banach and Kuratowski 1929] は，連続体仮説を仮定すると $X = [0,1]$ のときにはそのような測度が存在しないことを証明した．さらにバナッハは上の条件を満たす測度が存在するならば，条件 (3) よりも強い性質を満たす測度が存在することに気付いていた．(3) の性質を一般化すると，つぎに定義する概念が得られる．

定義 3.12 集合 X 上の測度 m がつぎの条件を満たすときに，m は λ 加法的といわれる（λ は無限基数）．任意の $\gamma < \lambda$ に対し，もし $\{Y_\alpha : \alpha < \gamma\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ が互いに交わらないならば，$m(\bigcup_{\alpha<\gamma} Y_\alpha) = \sum_{\alpha<\gamma} m(Y_\alpha)$ [6].

定理 3.13 κ を κ 上に測度が存在する最小の基数とする．このとき κ 上の測度はすべて κ 加法的になっている．

---

6) ここで $\sum_{\alpha<\gamma} m(Y_\alpha)$ は $\sup\{\sum_{\alpha\in s} m(Y_\alpha) : s$ は γ の有限部分集合 $\}$ のこととする．

定義 3.14　基数 $\kappa > \aleph_0$ は，κ 上に κ 加法的な測度が存在するときに実数値可測基数と呼ばれる．

可測基数が実数値可測基数になっていることは，つぎのようにして確認できる．F が κ 上の κ 完備な超フィルターだとすると，関数 $m : \mathcal{P}(\kappa) \to [0,1]$ を「$X \in F$ ならば $m(X) = 1$，$X \notin F$ ならば $m(X) = 0$」と定義する．この m が κ 上に κ 加法的な測度になることは容易に確かめられる．

もし m が κ 上の κ 加法的な測度であれば，$|Y| < \kappa$ な $Y \subseteq \kappa$ に対して $m(Y) = 0$ となっている．それゆえ実数値可測基数は正則である（もしも κ が正則でなければ，κ を κ 未満個の濃度 κ 未満の部分集合たちに分割できるので，$m(\kappa) = 0$ となってしまう）．バナッハ [Banach 1930] は一般連続体仮説を仮定してすべての実数値可測基数が（弱）到達不可能基数になっていることを証明した．そして 20 歳を過ぎたばかりのウラムはつぎの定理を証明した．

定理 3.15（[Ulam 1930]）　すべての実数値可測基数は弱到達不可能基数である．

また，ウラムはつぎの概念の重要性に気付いた．

定義 3.16　基数 κ 上の測度 m に対し，$A \subseteq \kappa$ が m の原子 (atom) とは，$m(A) > 0$ ですべての $B \subseteq A$ に対し $m(B) = m(A)$ か $m(B) = 0$ のどちらかが成立することである．そのような原子が存在しないときには，m は無原子的といわれる．

さらに，ウラムは無原子的な測度に関してつぎの結果を得た．

定理 3.17　κ 上に無原子的で κ 加法的な測度が存在するならば，$\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ となる．

もし $\kappa > \aleph_0$ がこの定理の仮定を満たしているならば，定理 3.15 により κ は弱到達不可能基数になっている．つまりこのときは $2^{\aleph_0}$ がある弱到達不可能基数以上になっており，連続体仮説は（強く！）否定される．

実は原子をもっている測度からも興味深い結論が得られることが知られている．m を κ 上の κ 加法的な測度で $A \subseteq \kappa$ を m の原子とする．このとき $\mathcal{P}(\kappa)$ 上の関数 μ を $\mu(X) = \frac{m(X \cap A)}{m(A)}$ で定義する．明らかにこの μ も κ 上の κ 加法的な測度となっている．さらに A が m の原子なので μ のとりうる値は 0 か 1 である．ここで κ の部分集合の集まり F を $F = \{X \subseteq \kappa : \mu(X) = 1\}$ と定義する．μ が κ 上の κ 加法的な測度だったので，F は κ 完備な超フィルターである．つまり κ 上の κ 加法的な原子をもつ測度があれば，κ は可測基数となることが分かった．ウラムたちの研究の約 40 年後にソロヴェイ [Solovay 1966; 1971] が可測基数と実数値可測基数について，つぎの二つの定理を証明した．

定理 3.18　κ が可測基数であれば，「$\kappa = 2^{\aleph_0}$ で κ は実数値可測基数」が成立するジェネリック拡大が存在する．

つまり (ZFC ＋「可測基数の存在」) のモデルから (ZFC ＋「$2^{\aleph_0}$ は実数値可測基数」) のモデルが強制法によって得られることが分かった．

すでに可測基数は実数値可測基数になっていることは示したので，つぎの定理により可測基数と実数値可測基数が同じ無矛盾性の強さをもっていることは明らかである．

定理 3.19　κ が実数値可測基数であれば，(ZFC ＋「κ は可測基数」) が成立する内部モデルが存在する．

この証明には飽和イデアル（3.4 節を参照）が用いられる．

3.2　初等的埋め込みと巨大基数

スコット [Scott 1961] が，可測基数の存在が構成可能性公理 ($V = L$) を否定することを証明したときに使われたのが，ここで解説する初等的埋め込みである．

定義 3.20　M と N を集合論の言語 $\mathcal{L}_\varepsilon$ の構造とする（M と N がクラスか集合かは問わない）．写像 $j : M \to N$ が M から N への初等的埋め込み (elementary embedding from M to N) であるとはつぎを意味する．$\mathcal{L}_\varepsilon$ の任意の論理式 $\varphi(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ と $x_1, x_2, \ldots, x_n \in M$ に対し，

$$M \vDash \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \iff N \vDash \varphi(j(x_1), j(x_2), \cdots, j(x_n))$$

が成立する．

つまり $j : M \to N$ が初等的埋め込みであるとは，j が $\mathcal{L}_\varepsilon$ の論理式で表現できることの真偽をすべて保存するような M から N への写像ということである．もし M から N への初等的埋め込みが存在するならば，M と N がまったく同じ $\mathcal{L}_\varepsilon$ の閉論理式 (sentence) たちを満たしている（つまり M と N は初等的同値となる）ことは明らかである．上の定義はクラスでの充足関係 (satisfaction relation) を扱っているので，一般の場合は ZFC ではうまく定式化できない．けれどもわれわれが扱うのは集合の場合か，必要なだけの定式化が ZFC で可能なクラスの場合のみなので問題は起こらない．これ以降もいささか乱暴であるが，厳密には ZF での命題になっていないようなクラスに関する命題も言及していく．それらの命題たちも手続きさえ踏めば，ZF で表現できる命題へと翻訳ができる．

スコットの定理が発表されてから，初等的埋め込みは巨大基数の研究には欠かせない道具になっていった．ある程度以上の無矛盾性の強さをもつ巨大基数公理はほとんどいろいろな条件を満たす初等的埋め込みの存在という形で特徴づけられてきた．

集合論の言語 $\mathcal{L}_\varepsilon$ のための構造で ε の解釈が本来の $\in$ であるとき，その構造を $\in$ モデルと呼ぶ．ZF の推移的な $\in$ モデルですべての順序数を含んでいるものを内部モデルという．

M と N が ZF の推移的な $\in$ モデルで $j : M \to N$ が初等的埋め込みであるならば，明らかに $j(\emptyset) = \emptyset$，$j(\{\emptyset\}) = \{\emptyset\}$, $j(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$ が成立するので，$j \restriction \omega$ は ω 上の恒等写像となることが分かる．また ω は同じ論理式によって M と N の中で定義できるので，$j(\omega) = \omega$ となる．それでは $j \restriction \mathrm{On}$（On は順序数全体のクラス）は恒等写像になるのか？

定理 3.21　M と N が ZFC の推移的な $\in$ モデルで $j: M \to N$ が初等的埋め込みとする．もし j が M 上の恒等写像でなければ，$j(\alpha) \neq \alpha$ となっている順序数 α が存在する．

「x は順序数」を表す論理式を考えると，任意の順序数 β に対し $j(\beta)$ も順序数となっていることが分かる．そこで帰納法を使ってすべての順序数 β に対し $j(\beta) \geq \beta$ が成立することが証明できる．ゆえに $j(\alpha) \neq \alpha$ ならば $j(\alpha) > \alpha$ となっている．初等的埋め込み j について考えるとき，$j(\alpha) > \alpha$ となる最小の順序数 α が重要な役割を果たす．j によって動かされる最小の順序数を j の臨界点 (critical point) と呼ぶ．

定理 3.22　以下の (1) と (2) は同値である．

(1) κ は可測基数である．
(2) 集合の宇宙 V からある内部モデルへの初等的埋め込み j が存在して，κ が j の臨界点となっている．

(2) ⇒ (1) の証明：κ が集合の宇宙 V からある内部モデルへの初等的埋め込み j の臨界点になっていると仮定する．κ の部分集合の集まり F を $F = \{X \subseteq \kappa : \kappa \in j(X)\}$ と定義する．この F が κ 完備な超フィルターとなっているので，κ は可測基数である．

(1) ⇒ (2) の証明にはこれから解説する超ベキの手法が必要である．F を集合 X 上の超フィルターとする．${}^X V$ で定義域が X である関数たちのクラスを示すことにする．

$f, g \in {}^X V$ に対し，$f \sim_F g \iff \{a \in X : f(a) = g(a)\} \in F$ とすると，$\sim_F$ は ${}^X V$ 上の同値関係になる．ここで任意の $f \in {}^X V$ に対し，$\{g \in {}^X V : g \sim_F f\}$ の要素のうちで最小のランクをもっているものを集めて $(f)_F$ と呼ぶことにする．最小のランクをもつものだけ集めて $(f)_F$ をつくる理由は，$\{g \in {}^X V : g \sim_F f\}$ が真のクラスになってしまうからである．ここでクラス ${}^X V/F$ を ${}^X V/F = \{(f)_F : f \in {}^X V\}$ と定義し，${}^X V/F$ 上の 2 項関係 $\in_F$ を $(f)_F \in_F (g)_F \iff \{a \in X : f(a) \in g(a)\} \in F$ と定義する．

集合論の言語 $\mathcal{L}_\varepsilon$ のための構造 $\langle {}^X V/F, \mathrel{E}_F \rangle$ を V の F による超べキ (ultrapower of V by F) と呼び，$\mathrm{Ult}(V, F)$ と記す．

より一般的には ZFC の推移的な $\in$ モデル M が $M \models$「F は X 上の超フィルター」となっているときには，$\{f \in M : f$ は定義域 X の関数$\}$ 上に $\mathrm{Ult}(V, F)$ の場合と同様に M の F による超べキ $\mathrm{Ult}(M, F)$ が定義できる．

つぎの定理は超積/超べキに関する基本的な結果であるウォシュの定理（[Kanamori 1994 邦訳] を参照）である．

定理 3.23 $\mathcal{L}_\varepsilon$ の論理式 $\varphi(v_1, \cdots, v_n)$ と関数 $f_1, \ldots, f_n : X \to V$ に対し，
$\mathrm{Ult}(V, F) \models \varphi((f_1)_F, \ldots, (f_n)_F)$
$\iff \{a \in X : V \models \varphi(f_1(a), \ldots, f_n(a))\} \in F$ が成立する．

この定理より ZFC から $\mathrm{Ult}(V, F) = \langle {}^X V/F, \mathrel{E}_F \rangle$ が ZFC のモデルになることが示される．しかしこのことは関係 $\mathrel{E}_F$ が well-founded[7]（つまり $\mathrel{E}_F$ に関する無限降下列が存在しない）となっていることは保証していない．もし $\mathrel{E}_F$ が well-founded になっていれば，崩壊の補題 (collapsing lemma)（[Kanamori 1994 邦訳] を参照）を使って，$\mathrm{Ult}(V, F)$ と同型な推移的なモデルが得られる．これを $\mathrm{Ult}(V, F)$ の推移的崩壊 (transitive collapse) と呼ぶ．われわれが扱う超フィルターによる超べキは，つぎの定理によって well-founded となることが保証される．

定理 3.24 超フィルター F が $\aleph_1$ 完備ならば $\mathrm{Ult}(V, F)$ は well-founded となる．

証明 $\mathrm{Ult}(V, F)$ が well-founded ではないと仮定する．X を定義域としてもつ関数 $f_0, f_1, f_2, \ldots$ が $\mathrm{Ult}(V, F)$ の要素の $\mathrel{E}$ $(= \mathrel{E}_F)$ に関する無限下降列 $(f_0) \ni (f_1) \ni (f_2) \ni \cdots$ を与えているとする．任意の $i \in \omega$ に対し，集合 Y_i を $Y_i = \{a \in X : f_{i+1}(a) \in f_i(a)\}$ と定義すると，$(f_{i+1}) \mathrel{E} (f_i)$ から $Y_i \in F$ が分かる．もし超フィルター F が $\aleph_1$ 完備ならば $\bigcap_{i \in \omega} Y_i \in F$ となる．しかし $a \in \bigcap_{i \in \omega} Y_i$ ならば $f_0(a) \ni f_1(a) \ni f_2(a) \ni \cdots$ となり，$\in$ に関する無限下降列ができてしまい矛盾が生じる．よって F は $\aleph_1$ 完備にはなれない． ■

7) 第 I 部では「整順的」と呼ばれている．

実は超フィルター F が $\aleph_1$ 完備であることと $\mathrm{Ult}(V,F)$ が well-founded になることは同値である（[Kanamori 1994 邦訳] の命題 5.3 参照）．

定理 3.22 の証明の続き（(1) $\Rightarrow$ (2) 部分）：F を κ 上の κ 完備な超フィルターとする．定理 3.24 により $\mathrm{Ult}(V,F)$ は well-founded となる．M を $\mathrm{Ult}(V,F)$ の推移的崩壊，$\pi : \mathrm{Ult}(V,F) \to M$ を同型写像とする．任意の関数 $f : \kappa \to V$ に対し，$\pi((f)_F)$ を $[f]_F$ と記す．

任意の集合 x に対し，f_x を定義域 κ で値 x をとる定数関数とする．写像 $j : V \to M$ を $j(x) = [f_x]_F$ で定義する．定理 3.23 より，この $j : V \to M$ が初等的埋め込みになっていることは明らかである．ここで κ が j の臨界点となっていることを示す．$\alpha < \kappa$ のとき，$j(\alpha) = \alpha$ となることは α に関する帰納法でつぎのように証明できる．$\alpha < \kappa$ で $j \restriction \alpha$ が α 上の恒等写像だと仮定する．$j(\alpha) = \{[g]_F : g \in {}^{\kappa}V,\ [g]_F \in [f_\alpha]_F\}$ となっており，さらに $[g]_F \in [f_\alpha]_F \iff \{\beta < \kappa : g(\beta) \in \alpha\} \in F \iff \exists \gamma < \alpha \, \{\beta < \kappa : g(\beta) = \gamma\} \in F \iff \exists \gamma < \alpha \, [g]_F = j(\gamma) = \gamma$ より，$j(\alpha) = \alpha$ が示される．

また id を κ 上の恒等写像とすると，$\alpha < \kappa$ に対し $\{\beta < \kappa : \alpha < \beta\} \in F$ なので $j(\alpha) < [\mathrm{id}]_F$．これにより $\kappa \le [\mathrm{id}]_F$ が分かる．しかし明らかに $[\mathrm{id}]_F < j(\kappa)$ なので，$\kappa < j(\kappa)$ が示される．

ゆえに κ は初等的埋め込み $j : V \to M$ の臨界点になっている． ■

κ を可測基数，F を κ 上の κ 完備な超フィルターとして，$j : V \to M$ が F による超ベキで与えられた初等的埋め込みとする．κ が初等的埋め込み $j : V \to M$ の臨界点になっていることより，$V_\kappa^M = V_\kappa$ となっていることが分かる．じつは内部モデル M と V の間には，もう少し強い類似性が認められる．$\{f : f$ は κ から M への関数$\}$ を ${}^{\kappa}M$ と記すことにする．上のようにして可測基数 κ から得られた内部モデル M は ${}^{\kappa}M \subseteq M$ を満たす．この性質を一般化してつぎの定義を得る．

定義 3.25 N を ZFC の推移的な $\in$ モデル，γ を順序数とする．${}^{\gamma}N \subseteq N$ のとき N は長さ γ の列に対し閉じているという．

3.1 節で定義したように（定義 3.5 および 3.6），フィルターはその双対イデアルが正規イデアルとなるときに，正規フィルターといわれる．可測基数の場合，以下のような正規性の特徴づけが可能である．

定理 3.26　F を可測基数 κ 上の κ 完備な超フィルターとする．以下の (1) と (2) は同値である．

(1) F は正規フィルターである．
(2) id を κ 上の恒等写像だとすると，$[\mathrm{id}]_F = \kappa$ が成立している．ただし $[\mathrm{id}]_F$ は $\mathrm{Ult}(V, F)$ の推移的崩壊の中で，写像 id の同値類に対応している要素である．

κ 上の κ 完備な超フィルターは正規フィルターになるとは限らない．しかし κ 上に κ 完備な超フィルターが存在するときには，必ず κ 上に正規な κ 完備な超フィルターが存在する．

定理 3.27　κ が可測基数ならば，κ 上に正規な κ 完備な超フィルターが存在する．

証明　$j : V \to M$ を，上で述べた κ 上の κ 完備な超フィルターによる超ベキから得られた初等的埋め込みとする．κ の部分集合の集まり F を $F = \{X \subseteq \kappa : \kappa \in j(X)\}$ とする．定理 3.22 の証明よりこの F も κ 上の κ 完備な超フィルターになっている．F が正規フィルターであることを示そう．関数 $g : \kappa \to \kappa$ に対し $\{\alpha \in \kappa : g(\alpha) \in \alpha\} \notin I_F$ と仮定する．しかし F が超フィルターなので，その双対イデアル I_F の要素ではないものは F の要素である．$\{\alpha \in \kappa : g(\alpha) \in \alpha\} \in F$ より，$j(g)(\kappa) \in \kappa$ が分かる．ゆえに $j(g)(\kappa) = \beta$ となる $\beta < \kappa$ が存在する．しかし κ が j の臨界点だったので，$j(\beta) = \beta$ である．$j(g)(\kappa) = j(\beta)$ より，$\{\alpha \in \kappa : g(\alpha) = \beta\} \notin I_F$ が導かれる．これによりその双対イデアル I_F は正規イデアルとなり，F が正規フィルターであることが示された．■

3.1 節で「もし κ が可測基数ならば，$\{\alpha < \kappa : \alpha$ は到達不可能基数 $\}$ の濃度は κ となる」という定理を紹介した．この定理はつぎの定理と上の定理の

系となっている.

定理 3.28 F が κ 上の正規な κ 完備な超フィルターならば, $\{\alpha < \kappa :$ α は到達不可能基数 $\} \in F$ となっている.

証明 $j : V \to M$ を正規超フィルター F による超ベキから得られた初等的埋め込みとする. F が正規なので, id を κ 上の恒等写像とすると $[\mathrm{id}]_F = \kappa$ が成立している. κ は可測基数なので, 到達不可能基数である. 到達不可能性の定義より, 到達不可能基数はどんな内部モデルの中でも到達不可能基数となっているので, $M \models$「κ は到達不可能基数」となっている. ウォシュの定理 (定理 3.23) と $[\mathrm{id}]_F = \kappa$ より, $\{\alpha < \kappa : \alpha$ は到達不可能基数 $\} \in F$ となる. ■

ここでこれまでおあずけにしていたスコットの定理 [Scott 1961] の証明を与えよう.

定理 3.29 もし可測基数が存在するならば, 構成可能性公理 $(V = L)$ は成立しない.

証明 可測基数の存在と構成可能性公理 $(V = L)$ を仮定して矛盾を導く. κ を最小の可測基数とし, $j : V \to M$ を κ 上の κ 完備な超フィルターを使って得られる初等的埋め込みとする. $j(\kappa) > \kappa$ と $M \models$「$j(\kappa)$ は最小の可測基数」より, $M \models$「κ は可測基数ではない」. ZFC の内部モデルである $M \subseteq V = L$ は, L が最小の ZF の内部モデルであること (本書第 I 部の定理 4.4) より $M = L(= V)$ となる. しかし $L \models$「κ は (最小の) 可測基数」だったので, 矛盾が導かれた. ■

集合の宇宙 V からの初等的埋め込みの臨界点として, 可測基数よりも無矛盾性の意味で強い巨大基数を定義することもできる.

定義 3.30 κ を基数, γ を κ 以上の順序数とする. つぎの性質を満たすとき, κ は γ 超コンパクト基数という. 長さ γ の列に対し閉じている内部モデ

ル M と，κ を臨界点とする初等的埋め込み $j: V \to M$ で $j(\kappa) > \gamma$ となるものが存在する．

上の定義より $\gamma < \beta$ ならば β 超コンパクト性から γ 超コンパクト性が導ける．「κ は κ 超コンパクト基数」と「κ は可測基数」は同値である．しかし γ が大きくなると γ 超コンパクト性の無矛盾性の強さは増大する．

定理 3.31　κ が 2^κ 超コンパクト基数ならば，κ 上に $\{\alpha < \kappa : \alpha$ は可測基数 $\} \in F$ となる κ 完備な超フィルター F が存在する．

証明　$j: V \to M$ を κ の 2^κ 超コンパクト性を保証する初等的埋め込みとする．F を $F = \{X \subseteq \kappa : \kappa \in j(X)\}$ と定義すると，上でみたように F は κ 上の κ 完備な超フィルターとなる．内部モデル M は長さ 2^κ の列に対し閉じているので，κ の部分集合はすべて M の要素である．この事実と ${}^{2^\kappa}M \subseteq M$ をもう 1 回使って，κ 上の κ 完備な超フィルターはすべて M の要素となることが分かる．ゆえに $M \models$「κ は可測基数」となり，$\kappa \in j(\{\alpha < \kappa : \alpha$ は可測基数 $\})$ が分かる． ■

一般に初等的埋め込み $j: V \to M$ の臨界点として与えられる巨大基数は，内部モデル M の V との類似性が強くなるほど無矛盾性の強さを増す．それでは究極の類似性 $M = V$ の場合はどうだろうか？　つぎはキューネンの定理である．

定理 3.32（[Kunen 1971]）　V から V への初等的埋め込みは恒等写像以外は存在しない．

今ではこの定理の証明はいろいろな方法で与えられることが知られている（[Kanamori 1994 邦訳] 参照）．ただし知られているすべての証明において，選択公理が使われている．この定理が選択公理を使わずに証明できるかどうかは未解決である．しかし論理式でパラメタを使って定義されるような V から V への初等的埋め込みが存在しないことは選択公理を使わずに証明できる（[Suzuki（鈴木晃）1999]）．

定義 3.33　すべての κ 以上の順序数 γ に対し，κ が γ 超コンパクト基数となっているとき κ は超コンパクト基数と呼ばれる．

可測基数と同様に，超コンパクト基数も超フィルターの存在による定義を与えることが可能である．

定義 3.34　κ を基数，λ を κ 以上の順序数として，λ の部分集合の集まり $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ を $\mathcal{P}_\kappa\lambda = \{s \subseteq \lambda : |s| < \kappa\}$ と定義する．

定理 3.35　以下の (1) と (2) は同値である．

(1) κ は λ 超コンパクト基数である．
(2) $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上に κ 完備な正規超フィルターが存在する．

上の定理の (2) において正規性という条件を除くことによって，λ 強コンパクト基数という巨大基数が定義される．

定義 3.36　$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上に κ 完備な超フィルターが存在するときに，κ は λ 強コンパクト基数と呼ばれる．すべての κ 以上の順序数 γ に対し，κ が γ 強コンパクト基数となっているとき κ は強コンパクト基数と呼ばれる．

超コンパクト基数よりも無矛盾性の意味ではるかに強い巨大基数として，膨大基数 (huge cardinal) が知られている．

定義 3.37　κ が膨大基数とは，κ を臨界点としてもつ初等的埋め込み $j : V \to M$ で ${}^{j(\kappa)}M \subseteq M$ となるものが存在することを意味する．

膨大基数を少し弱めた巨大基数として弱膨大基数が知られている．

定義 3.38　κ が弱膨大基数とは，κ を臨界点としてもつ初等的埋め込み $j : V \to M$ で M が長さ $j(\kappa)$ 未満の列に対して閉じているものが存在することである．

初等的埋め込み $j : V \to M$ が与えられているときに，この j を構成可能集合のクラス L に制限したもの $j \restriction L$ について考えてみる．$j \restriction L$ は L から L への初等的埋め込みになっている．このような初等的埋め込みの存在も巨大基数公理の一つである．

定義 3.39 L から L への恒等写像でない初等的埋め込みが存在するとき，$0^\#$ が存在するという．

本当は $0^\#$ とは，自然数の集合で L の性質を特徴づけるある特別な条件を満たしているものを指す．この $0^\#$ の本来の定義を与えるためには，識別不可能性 (indiscernibility) の理論が必要である．ここではそれを解説している余裕がないので，興味をお持ちの読者は [Kanamori 1994 邦訳] や [Jech 2003] を参照していただきたい．この $0^\#$ と呼ばれる自然数の集合（一つの実数とみなすこともできる）の存在は，L から L への恒等写像でない初等的埋め込みの存在と同値であることが知られている．

無矛盾性の強さについては，$0^\#$ の存在は可測基数よりも弱いが，上のキューネンの定理（定理 3.32）より $0^\#$ の存在も構成可能性公理 ($V = L$) を否定する．実は $0^\#$ の存在はつぎの定理が示すように V と L が大きく異なっていることを主張している．

定理 3.40 $0^\#$ が存在すれば，すべての基数 $\kappa > \aleph_0$ に対し $L \models$「κ は到達不可能基数」が成立する．

さらに 3.5 節で解説するイェンセンの被覆定理（定理 3.71）は，「$0^\#$ が存在しない」ということと「V と L の類似性」が同値であることを教えてくれる．

任意の実数 x に対し，$x^\#$ をつぎのように定義する．

定義 3.41 実数 x に対し，$L(x)$[8] から $L(x)$ への初等的埋め込みが存在するとき，$x^\#$ が存在するという．

V から内部モデルへの初等的埋め込み j を $L(x)$ に制限すると，$j(x) = x$ なので $j \restriction L(x)$ は $L(x)$ から $L(x)$ への初等的埋め込みとなっている．ゆえに可測基数の存在からは $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists x^\#$[9] が導ける．しかし $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists x^\#$ の無矛盾性の強さは可測基数よりも弱いことも簡単に分かる．$\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合の正則性を導くためには，$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists x^\#$ で十分なことが知られている．これについては次節で解説する．

---

8) $L(x)$ の定義は 3.5 節を参照．

9) これは「すべての実数 x に対して $x^\#$ が存在する」を意味する．

3.3　決定性公理

$\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合の正則性は可測基数の存在より得られることが，ソロヴェイの定理（定理 3.11）によって分かった．それでは射影階層で $\mathbf{\Sigma}^1_2$ の上のレベルの実数の集合たち（たとえば $\mathbf{\Sigma}^1_3$ 集合）の正則性を保証するような巨大基数公理をみつけることはできるのだろうか？

この質問に答える前に，すべての実数の集合の正則性を保証してくれる公理を紹介しよう．この公理を定義するために以下のような 2 人で競うゲームについて考えてみる．

定義 3.42　A をベール空間 $\mathcal{N}$ の部分集合とし，2 人のプレーヤー（プレーヤー 1 とプレーヤー 2）で競われるゲーム G_A を以下のように定義する．まずプレーヤー 1 が自然数 n_0 を選ぶ．その後プレーヤー 2 が自然数 m_0 を選ぶ．そしてプレーヤー 1 が n_1 を選び，つぎにプレーヤー 2 が m_1 を選ぶ．このように 2 人のプレーヤーは交互に自然数を選んでいく．このとき 2 人のプレーヤーは相手が選んだ自然数が何かは知っているとする．2 人が選んだ可算個の自然数を登場した順番に並べることによって得られる列を x で示す．つまり $x = \langle n_0, m_0, n_1, m_1, \ldots \rangle$．この x をベール空間 $\mathcal{N}$ の元とみることができる．このときもし x が A の元ならばプレーヤー 1 の勝ち，もしそうでなければプレーヤー 2 の勝ちとする．

自然数の有限列（長さ 0 の空な列 $\emptyset$ も含む）に自然数を対応させる関数を戦略と呼ぶことにする．戦略である f はつぎの条件を満たすときにプレーヤー 1 のゲーム G_A での必勝法と呼ばれる．

> 任意の自然数の列 $m_0, m_1, m_2, \ldots$ に対し，
> $\langle f(\emptyset), m_0, f(\langle m_0 \rangle), m_1, f(\langle m_0, m_1 \rangle), m_2, f(\langle m_0, m_1, m_2 \rangle), \ldots \rangle$
> は必ず A の元になる．

これはつまりプレーヤー 1 が $f(\emptyset)$ をその第 1 手とし，そのつぎにプレーヤー 2 が選ぶ第 1 手 m_0 に対し $f(\langle m_0 \rangle)$ をプレーヤー 1 の第 2 手，そしてプレーヤー 2 が選ぶ第 2 手 m_1 に対し $f(\langle m_0, m_1 \rangle)$ をプレーヤー 1 の第 3 手という

具合に，戦略 f に従ってこのゲームを進めていくときには，プレーヤー 2 がどのように $m_0, m_1, m_2, \ldots$ を選んでもプレーヤー 1 は必ずゲーム G_A で勝利するということである．同様にしてプレーヤー 2 のゲーム G_A での必勝法も定義される．

定義 3.43 ベール空間 $\mathcal{N}$ の部分集合 A が決定的 (determined) とは，ゲーム G_A においてどちらかのプレーヤーが必勝法をもつことを意味する．

決定性公理 (Axiom of Determinacy) とは，「ベール空間 $\mathcal{N}$ のすべての部分集合が決定的」という公理である．これ以降，決定性公理を AD と略すこともある．

AD は 1962 年にミシェルスキーとスタインハウス [Mycielski and Steinhaus 1962] によって導入された．公理系 ZFC に AD を加えた公理系で集合論を展開することはできない．それは AD が選択公理 AC と両立しないからである（選択公理 AC を使えば決定的ではない $\mathcal{N}$ の部分集合をつくることができる）．そこで AD を公理として活用するためにはつぎの二つの方法が考えられる．まず選択公理を弱めた公理系（たとえば ZF + 従属選択の公理）に AD を加えた公理系で集合論を展開する方法がその一つである．

もう一つは AD に制限をつける方法である．ここでこの例を二つあげてみよう．

(1) ベール空間 $\mathcal{N}$ のすべての射影集合が決定的である．

(2) 内部モデル $L(\mathbb{R})$ で，AD が成立する．

すべての射影集合は $L(\mathbb{R})$ に含まれているので，(2) $\Longrightarrow$ (1) となる．

(ZF + AD) はつぎのソロヴェイの定理の系が示すように，無矛盾性の意味で強い公理系となっている．

定理 3.44 (ZF + AD) のもとでは $\aleph_1$ は可測基数となっている．

可測基数が到達不可能基数となることの証明には，選択公理 AC が本質的な形で使われていた．しかし可測基数がもっている超フィルターを使ってある内部モデルをつくることによって，(ZFC +「可測基数が存在する」) のモデルが得られる．

系 3.45 (ZF + AD) が無矛盾であれば，(ZFC +「可測基数が存在する」) も無矛盾である.

証明 F が $\aleph_1$ 上の $\aleph_1$ 完備な超フィルターとする．内部モデル $L[F]$ は (ZFC +「可測基数が存在する」) のモデルとなっている（$L[F]$ については 3.5 節を参照していただきたい）. ■

しかし実は，(ZF + AD) は無矛盾性の強さの意味で (ZFC +「可測基数が存在する」) よりずっと強いことが知られている．これについては 4.1 節で解説する.

AD は実数の集合の性質に関して大きな影響力をもっている．たとえば AD から「実数の集合はすべてルベーグ可測でベールの性質と完全集合の性質を満たす」が証明できる．つぎの定理が示すように AD に制限をつけたものからも，実数の集合に関するいろいろな性質を導ける.

定理 3.46 (ZF +「従属選択の公理」+「すべての $\mathbf{\Sigma}^1_n$ 集合は決定的」) より，すべての実数の $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$ 集合がルベーグ可測でベールの性質と完全集合の性質をもつことが導かれる.

そのようなわけで「射影階層のどのレベルまで決定的か？」という問題が重要になってくる．1975 年にマーティンはつぎの定理を発表した.

定理 3.47（[Martin 1975]） 公理系 ZFC のもとですべてのボレル ($= \mathbf{\Delta}^1_1$) 集合は決定的である.

「すべての $\mathbf{\Sigma}^1_n$ 集合は決定的」（これを $\mathbf{\Sigma}^1_n$ 決定性と呼ぶ）と「すべての $\mathbf{\Pi}^1_n$ 集合は決定的」($\mathbf{\Pi}^1_n$ 決定性）が同値となることは容易に分かる ([Moschovakis 1980, 6A. 4.])．射影階層において $\mathbf{\Delta}^1_1$ のつぎのレベルである $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合や $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合については，それらのレベルでの決定性は ZFC から（ZFC が矛盾していないかぎり）証明できない．それはそのレベルの集合たちが決定的であれば $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合が完全集合の性質を満たすことが導かれるからである．「すべての $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合が完全集合の性質を満たす」が到達不可能基数の存在と同じ無矛盾性の強さをもっていることを思い出していただきたい（定理 2.13).

マーティン [Martin 1970] は可測基数の存在から，すべての $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合（と $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合）は決定的となることが導けることを証明した．そしてマーティンとハーリントン [Harrington 1978] によって，$\mathbf{\Sigma}^1_1$ 決定性がある巨大基数公理と同値であることが示された．

定理 3.48 以下の (1) と (2) は同値である．

(1) すべての $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合は決定的（$\mathbf{\Sigma}^1_1$ 決定性）である．
(2) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists x^{\#}$[10]．

そして射影階層の $\mathbf{\Sigma}^1_1/\mathbf{\Pi}^1_1$ より上の各レベルが決定的であることと同値または無矛盾性の意味で同じ強さをもつ巨大基数公理を決定していくことが大きな課題となった．マーティン [Martin 1980] は $\mathbf{\Sigma}^1_2/\mathbf{\Pi}^1_2$ 集合の決定性がある巨大基数公理から導けることを証明した．

定理 3.49 初等的埋め込み $j : V \to M$ があり，ある λ に対し $j \restriction V_\lambda \neq \mathrm{id} \restriction V_\lambda$ で $j(V_\lambda) = V_\lambda$ となっているならば，すべての $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合は決定的である．

マーティン [Martin 1980] が使用した巨大基数公理は，この定理の仮定より多少弱いものである．しかしどちらの仮定もそれまで集合論で使われてきた巨大基数公理の中で最も無矛盾性の意味で強いものであった．キューネンの定理（定理 3.32）の証明を使うと，「ある λ に対し $j \restriction V_\lambda \neq \mathrm{id} \restriction V_\lambda$, $j(V_{\lambda+1}) = V_{\lambda+1}$ となる初等的埋め込み $j : V \to M$ の存在」から矛盾を導くことができる．

マーティンの定理の証明の自然さのため，多くの研究者はマーティンが使った巨大基数公理と $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 決定性は同じ無矛盾性の強さをもっているのではと考えた．しかしこれを証明するために必要な内部モデルの研究は，遅々として進まなかった（3.5 節を参照）．

マーティンが使った巨大基数公理が無矛盾性の意味で非常に強いものだったので，(ZFC +「すべての射影集合は決定的である」) は無矛盾性の強さの

10) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists x^{\#}$ は無矛盾性の意味で可測基数より弱い．これにより定理 3.11 の仮定が弱められる．

意味において，ZFC にすでに知られているどんな巨大基数公理を加えた公理系よりも強いだろうと推測された．また「ZF + 決定性公理」の無矛盾性から (ZFC +「すべての射影集合は決定的である」) の無矛盾性が導けることが分かっていたので，多くの集合論の研究者はつぎのような考えをもっていた．

予想 1 (ZF + 決定性公理) は，無矛盾性の意味においてすでに知られている巨大基数公理を ZFC に加えた公理系よりも強い．

3.4 イデアル

「可測基数」と「初等的埋め込み」の節でみてきたように，ある条件を満たすフィルター/イデアルの存在で可測基数や超コンパクト基数などの巨大基数は定義できる．この節では，巨大基数を定義するイデアルを一般化してみる．それにより強い無矛盾性をもったイデアルの性質をいくつか定義する．これらの性質を満たすイデアルの存在は，巨大基数公理たちと同等の無矛盾性の強さをもっている．これらのイデアルは $\aleph_1$ 上や $\mathcal{P}_{\aleph_1}\aleph_2$ 上にも存在できるので，直接には巨大基数の存在を要請しない．

まず基数 κ 上の κ 完備な正規フィルターで最小なものを定義するための準備をする．

定義 3.50

(1) $X \subseteq \kappa$ が閉じている (closed) とは，任意の順序数 $\gamma < \kappa$ に対し，もし $\langle \alpha_\beta : \beta < \gamma \rangle$ が X の要素の上昇列ならば $\sup\{\alpha_\beta : \beta < \gamma\}$ も X の要素である．

(2) $X \subseteq \kappa$ が非有界 (unbounded) とは，任意の $\gamma < \kappa$ に対し，$\gamma < \alpha < \kappa$ となる X の要素 α が存在することである．

(3) $X \subseteq \kappa$ が非有界で閉じているときに，X は κ の club[11] であるという (club は "closed and unbounded subset" の略)．

11) club を閉非有界と呼ぶこともある．

定理 3.51 正則非可算基数 κ に対し，$F^{\text{club}}_{\kappa} = \{X \subseteq \kappa : X$ の部分集合で κ の club なものがある $\}$ とすると，F^{club}_{κ} は κ 上の κ 完備な正規フィルターで最小[12]なものになっている．この F^{club}_{κ} を κ 上の club フィルターと呼ぶ．

定義 3.52 κ 上の club フィルターの双対イデアルは κ 上の非定常イデアル (non-stationary ideal over κ) と呼ばれる．このイデアルを NS_{κ} と記す．

NS_{κ} の要素は κ の非定常 (non-stationary) な部分集合と呼ばれる．任意の部分集合 $X \subseteq \kappa$ に対し，「X が非定常である」は「ある club $C \subseteq \kappa$ に対し $X \cap C = \emptyset$ となる」と同値である．また $X \subseteq \kappa$ に対し，「X が定常である」とは「すべての club $C \subseteq \kappa$ に対し，$X \cap C \neq \emptyset$ となる」を意味する．

$\mathcal{P}_{\kappa}\lambda$ に対しても同様な定義を与えることができる．

定義 3.53

(1) $X \subseteq \mathcal{P}_{\kappa}\lambda$ が閉じている (closed) とは，任意の順序数 $\gamma < \kappa$ に対し，もし $\langle s_{\beta} : \beta < \gamma \rangle$ が X の要素の上昇列（つまり $\beta_1 < \beta_2 < \gamma$ ならば $s_{\beta_1} \subseteq s_{\beta_2}$）ならば，$\bigcup\{s_{\beta} : \beta < \gamma\}$ も X の要素である．
(2) $X \subseteq \mathcal{P}_{\kappa}\lambda$ が非有界 (unbounded) とは，任意の $t \in \mathcal{P}_{\kappa}\lambda$ に対し $t \subseteq s$ となる X の要素 s が存在することである．
(3) $X \subseteq \mathcal{P}_{\kappa}\lambda$ が非有界で閉じているときに，X は κ の club であるという．

定義 3.54 正則非可算基数 κ と順序数 $\lambda \geq \kappa$ に対し，$F^{\text{club}}_{\kappa\lambda} = \{X \subseteq \mathcal{P}_{\kappa}\lambda :$ X の部分集合で $\mathcal{P}_{\kappa}\lambda$ の club なものがある $\}$ とすると，$F^{\text{club}}_{\kappa\lambda}$ は $\mathcal{P}_{\kappa}\lambda$ 上の κ 完備な正規フィルターで最小なものとなっている．この $F^{\text{club}}_{\kappa\lambda}$ を $\mathcal{P}_{\kappa}\lambda$ 上の club フィルターと呼ぶ．

κ の場合と同様に $F^{\text{club}}_{\kappa\lambda}$ の双対イデアルを $\mathcal{P}_{\kappa}\lambda$ 上の非定常イデアル (non-stationary ideal over $\mathcal{P}_{\kappa}\lambda$) と呼ぶ．このイデアルを $\mathrm{NS}_{\kappa\lambda}$ と記す．

定義 3.55 集合 X 上のイデアル I が与えられているときに，X の部分集合の集まり I^+ を $I^+ = \{Y \subseteq X : Y \notin I\}$ と定義する．

12) ここでいう最小性とは，すべての κ 上の κ 完備な正規フィルター F に対し $F^{\text{club}}_{\kappa} \subseteq F$ が成立することである．

(1) $Z \in I^+$ に対し，$I|Z = \{Y \subseteq X : Y \cap Z \in I\}$ と定義する．この $I|Z$ は I と $X - Z$ で生成される最小のイデアルになっている．

(2) $\mathcal{A} \subseteq I^+$ は，任意の相違なる $A, B \in \mathcal{A}$ に対し $A \cap B \in I$ となっているときに，I^+ の反鎖 (anti-chain) と呼ばれる．

(3) もし I^+ のすべての反鎖の濃度が基数 κ 未満ならば，イデアル I は κ 飽和 (κ-saturated) になっているという．イデアル I が κ 飽和となるような最小の基数 κ を I の飽和数という．

イデアル I が与えられているとき，I に対応する半順序集合 $\mathbb{P}_I$ をつぎのように定義する．

定義 3.56　半順序集合 $\mathbb{P}_I$ は $\langle I^+, \leq_{\mathbb{P}_I} \rangle$ で定義される．ただし順序 $\leq_{\mathbb{P}_I}$ を以下のように定める．$A, B \in I^+$ に対し，$A \leq_{\mathbb{P}_I} B \iff A \subseteq B$.

定義 3.57　$D \subseteq I^+$ が $\mathbb{P}_I$ 稠密とは，$\forall A \in I^+\ \exists B \in D\,(B \leq_{\mathbb{P}_I} A)$ が成立することをいう．

定義 3.58　$G \subseteq I^+$ はつぎの条件を満たすとき $\mathbb{P}_I$ ジェネリック・フィルターと呼ばれる．

(1) $A, B \in I^+$ で $A \in G$ かつ $A \leq_{\mathbb{P}_I} B$ ならば $B \in G$.

(2) $A, B \in G$ ならば $A \cap B \in G$.

(3) もし D が $\mathbb{P}_I$ 稠密ならば $D \cap G \neq \emptyset$.

定義 3.59　I^+ の要素 A が原子 (atom) とはイデアル $I|A$ が 2 飽和となっていることである．つまり A_1, A_2 が A の部分集合でともに I^+ の要素であれば，必ず $A_1 \cap A_2 \in I^+$ となっている．

もし I が原子をもたないイデアルだとすると，I の $\mathbb{P}_I$ ジェネリック・フィルターは集合の宇宙 V の中には存在しない．われわれがここで扱うすべてのイデアルは原子をもたない．そこで $\mathbb{P}_I$ ジェネリック・フィルターを得るためには宇宙 V を拡張する必要がある．もし G がジェネリック・フィルターならば $V \cup \{G\}$ を部分クラスとして含む最小の ZFC のモデルが存在する．そ

のモデルを V の G による拡張と呼び，$V[G]$ と記す（$V[G]$ については，本書第 I 部の 4.2 節を参照していただきたい）．

G をイデアル I の $\mathbb{P}_I$ ジェネリック・フィルター，F_I を I の双対フィルター，$\mathcal{P}(X)^V$ を V 中での X のベキ集合とすると，$F_I \subseteq G \subseteq \mathcal{P}(X)^V$ と $\forall X \in G$ $\forall Y \in \mathcal{P}(X)^V (X \subseteq Y \Longrightarrow Y \in G)$ が成立している．

さらにつぎの定理が示すように，$\mathbb{P}_I$ ジェネリック・フィルター G には I の双対フィルター F_I のいくつかの性質が受け継がれている．

定理 3.60　I を集合 X 上のイデアル，G を $\mathbb{P}_I$ ジェネリック・フィルターとする．

(1) V 中のすべての $Y \subseteq X$ に対し，$Y \in G$ か $X - Y \in G$ となっている．
(2) I が κ 完備ならば，すべての $\gamma < \kappa$ と V 中の任意の $\{Y_\alpha : \alpha < \gamma\} \subseteq G$ に対し，$\bigcap_{\alpha<\gamma} Y_\alpha \in G$ が成立する．
(3) I が正規ならば，V 中の任意の関数 $f : X \to \bigcup X$ に対し，もし $\{a \in X : f(a) \in a\} \in G$ ならば $\{a \in X : f(a) = c\} \in G$ となる c が存在する．

一見すると上の定理の結論は G が巨大基数の存在を保証するような超フィルターの存在を主張しているように思える．しかし V 中の X の部分集合たちに対し超フィルターとなっている G は，V の中には存在しない．けれども下でみるようにイデアルがある条件を満たすときに，巨大基数と同様な結果をイデアル I からジェネリック・フィルターを用いて得られる．

定義 3.61　I を集合 X 上のイデアル，G を $\mathbb{P}_I$ ジェネリック・フィルターとしたときに，V の G による超ベキをジェネリック超ベキ (generic ultrapower) と呼び，$\mathrm{Ult}(V, G)$ と記す．

ジェネリック超ベキ $\mathrm{Ult}(V, G)$ の場合は，通常の超ベキのときと異なり I の可算完備性のみからは $\mathrm{Ult}(V, G)$ が well-founded となることを保証できない．そこでつぎのような概念を定義しておく．

定義 3.62　イデアル I がプレシピタス (precipitous) とはつぎを意味する．もし G が $\mathbb{P}_I$ ジェネリック・フィルターならば，ジェネリック超べキ $\mathrm{Ult}(V,G)$ は well-founded となる．

$\mathrm{Ult}(V,G)$ が well-founded になっているとき，その推移的崩壊を M で表すと M は $V[G]$ の内部モデルとなっている．さらに通常の超べキの場合と同様に，V から M への初等的埋め込み $j : V \to M$ が $V[G]$ の中で定義できる．このような $j : V \to M$ を「G による V から M へのジェネリックな初等的埋め込み (generic elementary embedding from V to M induced by G)」と呼ぶ．

イェックとプリックリー [Jech and Prikry 1979] は，飽和数が十分小さいイデアルはプレシピタスとなることを示した．

定理 3.63　つぎが成り立つ．

(1) 正則非可算基数 κ 上の κ 完備なイデアル I が κ^+ 飽和ならば，I はプレシピタスである．

(2) κ を正則非可算基数とし λ を κ 以上の順序数とする．$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上の κ 完備な正規イデアル I が λ^+ 飽和ならば，I はプレシピタスである．

プレシピタス・イデアルの存在は無矛盾性の意味において巨大基数公理である．

定理 3.64　もしプレシピタス・イデアルが存在するならば，$0^\#$ も存在する．

証明　I をプレシピタス・イデアル，G を $\mathbb{P}_I$ ジェネリック・フィルターとする．そして G によるジェネリックな初等的埋め込み $j : V \to M$ の定義域を構成的集合の宇宙 L に制限すると L から L への初等的埋め込みが得られる ($L^V = L^{V[G]}$ である)．これにより $V[G]$ が「$0^\#$ が存在する」を満たしていることが分かる．強制法で $0^\#$ の存在を強制することはできない[13]ので，(V でも) $0^\#$ は存在している．■

13)　この部分の証明については，[Jech 2003] の Exercise 18.2 と Lemma 18.19 を参照せよ．

つぎの定理が示しているように，$\aleph_1$ のような後続基数[14]の上にもプレシピタス・イデアルは存在しうる．

定理 3.65（[Jech *et al.* 1980]） 以下の (1)–(3) は同じ無矛盾性の強さをもっている．

(1) ZFC +「可測基数の存在」.
(2) ZFC +「$\aleph_1$ 上に $\aleph_1$ 完備な正規プレシピタス・イデアルが存在する」.
(3) ZFC +「$\aleph_1$ 上の非定常イデアル $\mathrm{NS}_{\aleph_1}$ はプレシピタスである」.

マギドアは $\mathbf{\Sigma}^1_3$ 集合に関するつぎの定理をジェネリック超ベキを使って証明した．

定理 3.66（[Magidor 1980]） (ZFC +「$\aleph_1$ 上に $\aleph_1$ 完備な正規プレシピタス・イデアルが存在する」+「可測基数の存在」) より，すべての $\mathbf{\Sigma}^1_3$ 集合がルベーグ可測でベールの性質と完全集合の性質を満たすことが導ける．

ジェネリック超ベキが最初に登場したのはソロヴェイ [Solovay 1971] においてである．そこでソロヴェイはつぎの定理を証明することによって，「フォードアとハイナルの問題」と呼ばれていた定常集合の分割問題を解決した．

定理 3.67 κ を非可算正則基数とする．もし X が κ の定常部分集合ならば，X は κ 個の定常な部分集合に分割できる．これよりすべての κ の定常部分集合 X に対して，$\mathrm{NS}_\kappa|X$ は κ 飽和ではない．

同じ論文でソロヴェイはつぎの問題を提起した．

ソロヴェイの問題 $\aleph_1$ 上に $(\aleph_1)^+$ 飽和（つまり $\aleph_2$ 飽和）で $\aleph_1$ 完備な正規イデアルは存在するか？

このようなイデアルはプレシピタスなので，その存在は無矛盾性の意味で巨大基数公理とみることができる．ゆえにこの問題を公理系 ZFC のもとで肯定的に解決することは不可能である．キューネン [Kunen 1978] は，$\aleph_1$ 上に $\aleph_2$ 飽和で $\aleph_1$ 完備な正規イデアルも存在しうることを膨大基数を使って証明した．その後，マギドアによって仮定が弱膨大基数に弱められた．

14) 本書第 I 部の 2.4 節を参照.

定理 3.68　(ZFC +「弱膨大基数の存在」) が無矛盾ならば，(ZFC +「$\aleph_1$ 上に $\aleph_2$ 飽和で $\aleph_1$ 完備な正規イデアルが存在する」) も無矛盾である．

この定理によって「$\aleph_1$ 上の $\aleph_2$ 飽和で $\aleph_1$ 完備な正規イデアル」の無矛盾性の強さの上限が「弱膨大基数の存在」だということは分かった．また定理 3.63 と 3.65 より，その下限が「可測基数の存在」以上であることは明らかである．またキューネンは [Kunen 1978] で，(ZFC +「弱膨大基数の存在」) と (ZFC +「$\aleph_1$ 上に $\aleph_2$ 飽和で $\aleph_1$ 完備な正規イデアルが存在する」) は同じ無矛盾性の強さをもっているだろうという予想をたてた．この予想は以下の理由で自然なものであった．I を $\aleph_1$ 上の $\aleph_2$ 飽和で $\aleph_1$ 完備な正規イデアルとし，G を $\mathbb{P}_I$ ジェネリック・フィルター，$j: V \to M$ を G によるジェネリックな初等的埋め込みとする．この j の臨界点は $\aleph_1^V$ で，I が $\aleph_2$ 飽和だったので $j(\aleph_1^V) = \aleph_2^V$ となる．さらに $V[G]$ の内部モデル M が $V[G]$ の中で長さ $\aleph_1^V$ の列に対して閉じていることも，I の $\aleph_2$ 飽和性より導ける．つまりジェネリックな初等的埋め込み $j: V \to M$ は $\aleph_1^V$ を臨界点とし，M は長さ $j(\aleph_1^V)$ 未満の列に対して閉じている．j のこの性質と弱膨大基数を定義する初等的埋め込みの類似性が，上のキューネンの予想の根拠となった．

ここで「NS_κ が κ^+ 飽和になるか？」という問題について考えてみよう．非定常イデアル NS_κ の κ^+ 飽和性は「κ 上の κ 完備な正規イデアルはすべて κ^+ 飽和となっている」という命題と同値である．それでは非定常イデアル NS_κ は κ^+ 飽和となれるのだろうか？

$\aleph_1$ 上に $\aleph_2$ 飽和なイデアルを与えてくれたキューネンの手法からは，残念ながら「$NS_{\aleph_1}$ は $\aleph_2$ 飽和」のモデルは得られなかった．そして非定常イデアル NS_κ の飽和問題は，長い間未解決であった．現在ではこの問題については，$\kappa = \aleph_1$ と $\kappa > \aleph_1$ の場合では大きく状況が異なっていることが分かっている．ここでは $\kappa = \aleph_1$ の場合について，考えていくことにする．$\kappa > \aleph_1$ の場合については最終節で解説する．

[Steel and van Wesep 1982] は決定性公理を強くした命題と「実数で番号付けられた集合の族に対する選択公理」を ZF に加えた公理系の無矛盾性から，(ZFC +「$NS_{\aleph_1}$ は $\aleph_2$ 飽和」) の無矛盾性を得た．ウッディンはつぎの定

理が示すように，より弱い仮定から同じ結論を導くことに成功した．

定理 3.69（[Woodin 1983]） (ZF + 決定性公理 + 従属選択の公理) の無矛盾性より，(ZFC + 「$NS_{\aleph_1}$ は $\aleph_2$ 飽和」) の無矛盾性が導ける．

さらにケクリス [Kechris 1984] の定理「(ZF + 決定性公理) が無矛盾ならば，(ZF + 決定性公理 + 従属選択) も無矛盾」によってつぎのように上の定理の仮定が弱められる．

定理 3.70 (ZF + 決定性公理) の無矛盾性より，(ZFC + 「$NS_{\aleph_1}$ は $\aleph_2$ 飽和」) の無矛盾性が導ける．

すでに知られている巨大基数公理を ZFC に加えた公理系の無矛盾性から (ZFC + 「$NS_{\aleph_1}$ は $\aleph_2$ 飽和」) の無矛盾性が導けなかったので，上の定理は 3.3 節で述べた予想 1（「(ZF + 決定性公理) は無矛盾性の意味においてすでに知られている巨大基数公理を ZFC に加えた公理系よりも強い」）を裏付ける状況証拠のように思われた．そして多くの研究者はつぎのような考えをもつようになっていった．

予想 2 (ZFC + 「$NS_{\aleph_1}$ は $\aleph_2$ 飽和」) は無矛盾性の意味において，すでに知られている巨大基数公理を ZFC に加えた公理系より強い．

3.5 内部モデル

ゲーデルは L が (ZFC + 一般連続体仮説) のモデルになっていることを証明した．その証明で L の要素たちの整列順序 $\leq_L$ が存在することが示された．この整列順序 $\leq_L$ は L の中で定義可能で，さらに $\leq_L$ を実数 $\mathbb{R}$ に制限したものは $\mathbf{\Delta}^1_2$ な L 中の実数の整列順序になっている．そしてこの整列順序が $\langle \omega_1^L, \in \rangle$ と同型になっていることが分かる．このような $\mathbb{R}$ の $\mathbf{\Delta}^1_2$ な整列順序の存在から，ルベーグ可測ではなくベールの性質ももたない実数の集合で $\mathbf{\Delta}^1_2$ なものが存在していることがいえる．

イェンセンは実数直線の特徴づけに関するスースリンの仮説 (Suslin's Hypothesis) [Suslin 1920] が L では成立しないことなどを，巧みな無限組み合わせ的手法を L 内で展開することによって証明した．イェンセンは L をより細かく分析するために L の階層 J_α たちを定義し，L の「微細構造 (fine structure)」を調べた．この手法はのちに内部モデルの研究に不可欠のものとなっていった．

イェンセンの数ある構成可能集合の宇宙 L に関する業績の中でも，最も影響力の大きかったものの一つは，これから述べる被覆定理 [Devlin and Jensen 1975] であろう．この定理は「$0^\#$ が存在する」という巨大基数公理が成立していなければ，集合の宇宙 V と構成可能集合の宇宙 L の間にある強い類似性が存在することを示している．

定理 3.71（被覆定理 (Covering Theorem)） もし $0^\#$ が存在しないならば，任意の順序数の集合 X に対し $X \subseteq Y$ となる構成可能な集合 Y（つまり $Y \in L$）で $|Y| \leq |X| \cdot \aleph_1$ となるものが存在する．

つまり $0^\#$ が存在しないと仮定すると，順序数の集合で可算でないものは，必ず同じ濃度をもつ構成可能な集合によって覆うことができる．ただしこの濃度は L の中で測るのではなく V の中で測る本当の濃度であることに注意．

実は被覆定理の逆も成立している．定理 3.40 により $0^\#$ が存在しているときは，すべての非可算基数は L の中では到達不可能基数にみえている．ω 番目の無限基数 $\aleph_\omega$ の非有界な部分集合 $\{\aleph_i : i \in \omega\}$ を X とすると，$\aleph_\omega$ が L では正則基数にみえているので X を覆う濃度 $\aleph_\omega$ 未満な集合は L の中には存在しない．

被覆定理から多くの結果が得られているが，ここでは代表的なものをいくつかあげるだけにする．

系 3.72 $0^\#$ が存在しないと仮定するとつぎの (1)–(3) が成立する．

(1) $\aleph_2$ 以上の順序数 λ に対し，もし $L \vDash$「λ は正則基数」が成立するなら $cf(\lambda) = |\lambda|$ となっている．ゆえにすべての特異基数は L の中でも特異基数となっている．

(2) すべての特異基数 κ に対し，$(\kappa^+)^L = \kappa^+$ となっている．$(\kappa^+)^L$ とは L の中でみた κ のつぎの基数である．

(3) すべての無限基数 κ に対し，$\kappa^{cf(\kappa)} = 2^{cf(\kappa)} \cdot \kappa^+$ が成立する[15)]．これによりすべての強極限特異基数[16)] κ に対し，$2^\kappa = \kappa^+$ が成立する．

イェンセンの被覆定理は，L より大きな内部モデルたちと $0^\#$ より強い巨大基数たちとの関係を考えるときの手本となった．以下で解説するように，それらの内部モデルと巨大基数公理を関係づける被覆定理が知られている．

L は ZF の最小の内部モデルとなっている．集合 A が与えられているとき，A を要素とする ZF の内部モデルで最小のものが存在している．

定義 3.73 A を集合とする．順序数 α に対し，以下のように帰納的に $L_\alpha(A)$ を定義する．

- $L_0(A) = \mathrm{TC}(\{A\})$．$\mathrm{TC}(\{A\})$ とは A を要素として含む最小の推移的集合．
- $L_{\alpha+1}(A) = \{X \subseteq L_\alpha(A) : X$ は $L_\alpha(A)$ で定義可能 $\}$．
- γ が極限順序数ならば，$L_\gamma(A) = \bigcup_{\alpha<\gamma} L_\alpha(A)$．
- $L(A) = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} L_\alpha(A)$．

このようにして定義された $L(A)$ は A を要素としてもつ ZF の内部モデルで最小なものとなっている．L の階層の定義で「定義可能」を「A を述語として使って定義可能」に拡張することによって，内部モデル $L[A]$ が定義できる．より正確には，つぎのようになる．

定義 3.74 A を集合とする．順序数 α に対し，以下のように帰納的に $L_\alpha[A]$ を定義する．

- $L_0[A] = \emptyset$．

15) κ が正則なときは自明であるこの命題は，特異基数仮説 (Singular Cardinal Hypothesis) として知られている．

16) κ が強極限とは $\forall\delta < \kappa\,(2^\delta < \kappa)$ を意味する．

- $L_{\alpha+1}[A] = \{X \subseteq L_\alpha[A] : X$ は $\langle L_\alpha[A], \in, A \cap L_\alpha[A]\rangle$ で定義可能 $\}$.
- γ が極限順序数ならば，$L_\gamma[A] = \bigcup_{\alpha<\gamma} L_\alpha[A]$.
- $L[A] = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} L_\alpha[A]$.

$L[A]$ の要素たちは「A から相対的に構成可能な集合」と呼ばれる.

定理 3.75 $L[A]$ は公理系 ZFC のモデルで，つぎの性質を満たしている.

(1) もし M が ZF の内部モデルで $A \cap M \in M$ ならば，$L[A] \subseteq M$.
(2) $A \cap L[A]$ を $\overline{A}$ と記すと，$L[A] = L[\overline{A}]$ かつ $\overline{A} \in L[\overline{A}]$ が成立する.

相対的に構成可能な集合の宇宙を使って，可測基数の内部モデルを得ることができる.

定理 3.76 もし U が基数 κ 上の κ 完備な正規超フィルターならば，$U \cap L[U]$ を $\overline{U}$ と記すと以下が成り立つ.

(1) $L[U] \vDash$「$\overline{U}$ は κ 上の κ 完備な正規超フィルター」，さらに $L[U] \vDash$「κ は唯一の可測基数」が成立する.
(2) $L[U] \vDash$ 一般連続体仮説.
(3) $L[U]$ 内で定義可能な $L[U]$ 全体の整列順序が存在する．さらにこの順序を実数に制限したものは，$L[U]$ 内の実数の $\boldsymbol{\Delta}^1_3$ な整列順序[17)]である.

(3) の $\boldsymbol{\Delta}^1_3$ な整列順序を使うと，$V = L[U]$ のもとではルベーグ非可測でベールの性質をもたない $\boldsymbol{\Delta}^1_3$ 集合が存在していることが分かる.

上であげた性質以外にも $L[U]$ はいくつも L と共通の性質 (L-like properties) をもっている．$L[U]$ は可測基数をもつ ZFC の最小モデルであり，集合論の命題 φ に対し ZFC + φ から $L[U]$ が存在することが示されれば，Con (ZFC + φ) $\longrightarrow$ Con (ZFC +「可測基数の存在」) が証明されたことになる.

$L[U]$ と同様に，可測基数以外のいくつかの巨大基数に対しても最小内部モデルをつくることができる．そのような最小内部モデルとは別にコア・モデ

17) この順序はよい性質をもっている $\boldsymbol{\Delta}^1_3$ な実数の整列順序 (good $\boldsymbol{\Delta}^1_3$ well-ordering of reals) である．2.2 節脚注 1 を参照せよ.

ル (core models) と呼ばれる内部モデルたちが定義され，巨大基数公理との関係が研究されている．

ドッドとイェンセン [Dodd and Jensen 1981] が定義したコア・モデル K はつぎのような L と共通の性質をもっている．

(1) ZFC のモデルである K は定義可能な整列順序をもち，一般連続体仮説が成立する．

$0^{\#}$ の存在と L から L への恒等ではない初等的埋め込みとの同値性と同様な定理が，可測基数と K についても成立する．

(2) $L[U]$ が存在するということと，K から K への恒等ではない初等的埋め込みが存在することは同値である．

つぎのような被覆定理も知られている．

定理 3.77 もし $L[U]$ が存在しないならば，任意の順序数の集合 X に対し $X \subseteq Y$ となる集合 $Y \in K$ で $|Y| \leq |X| \cdot \aleph_1$ となるものが存在する．

当然，L のときと同様に被覆定理の系は可測基数と K に関しても成立する．

その後，ミッチェルやスティールらによってより強い巨大基数へとコア・モデルの理論は拡張されていった．それらは微細構造をもち，L と共通のいくつもの性質をもつ．そしてそれらの（弱）被覆定理[18]は，集合論のさまざまな命題の無矛盾性の強さを測る道具となっている．ここでスティールがコア・モデルを使って得た定理を紹介しよう．

定理 3.78 無限後続基数 κ 上に κ^+ 飽和で κ 完備なイデアルが存在し，可測基数 $> \kappa$ が存在すれば，ウッディン基数の内部モデルが存在する．

ウッディン基数 (Woodin cardinal) の定義は，4.1 節で与えることにする．そこでは，そのような飽和イデアルの無矛盾性の強さの上限についても解説する．

18) 弱被覆定理とは「ある巨大基数の内部モデルが存在しないときは，すべての特異な強極限基数 κ に対し，対応するコア・モデルでの κ^+ が V での κ^+ と等しくなる」という形の定理である．

$L[U]$ は可測基数のモデルなので，$L[U]$ では $\mathbf{\Sigma}^1_1/\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合の決定性が成立している．しかし $L[U]$ では実数の $\mathbf{\Delta}^1_3$ 整列順序が存在するので，$\mathbf{\Sigma}^1_2/\ \mathbf{\Pi}^1_2$ 集合の決定性は $L[U]$ では成立しない．これと同じように，マーティンが定理 3.49 で用いた巨大基数公理の内部モデルで実数の $\mathbf{\Delta}^1_4$ 整列順序をもつものがあるはずだと予想された．しかしこのような内部モデルはなかなかみつけることができなかった．

第4章
ゲーデルのプログラムの実践

この章ではゲーデルのプログラムがどのような成果をあげたか述べていきたい．まず 4.1 節では成功例として射影集合に関する一連の成果を解説していく．そして 4.2 節では基数の算術の研究に巨大基数がどのような役割を果たしていったか述べることにする．

4.1　射影決定性とウッディン基数

1984 年，フォアマン，マギドア，シェラはマーティンの公理を最も強力にしたマーティンズ・マキシマム[1] (Martin's Maximum) について研究していた．彼らは (ZFC +「超コンパクト基数の存在」) が無矛盾ならば，(ZFC + マーティンズ・マキシマム) も無矛盾になることを証明した．さらにマーティンズ・マキシマムを仮定すると，$\aleph_1$ 上の非定常イデアル $\mathrm{NS}_{\aleph_1}$ が $\aleph_2$ 飽和になることを示した．これによって 3.4 節の末尾で述べた，予想［ZFC +「$\mathrm{NS}_{\aleph_1}$ は $\aleph_2$ 飽和」は無矛盾性の意味において，すでに知られている巨大基数公理を ZFC に加えた公理系より強い］が間違っていたことが分かった．さらにウッディンは彼らの結果を使って，つぎの定理を証明した．

定理 4.1　超コンパクト基数の存在を仮定すれば，$L(\mathbb{R})$ に含まれるすべての

1)　マーティンズ・マキシマムについてはイェック [Jech 2003] を参照．

実数の集合はルベーグ可測で，ベールの性質と完全集合の性質を満たす．これより超コンパクト基数があれば，すべての射影集合は正則性をもつ．

実は後で述べるように，現在ではこの定理の仮定は超コンパクト基数の存在よりずっと弱くできることが分かっている．上の定理は内部モデルの研究にも大きな影響を与えた．この定理からすぐに分かることは，射影集合となるような実数の整列順序をもつ超コンパクト基数の内部モデルが存在しないことである．これによってマーティンが $\mathbf{\Sigma}^1_2/\mathbf{\Pi}^1_2$ 集合の決定性を導くために用いた巨大基数の内部モデルで実数の $\mathbf{\Delta}^1_4$ 整列順序をもったものを得るという計画は破綻してしまった．

ここで上の定理の証明について解説することにしよう．定理が最初に証明されてまもなく，ウッディンはその証明でフォアマンたちの定理に直接依存しないものを発表した．そこで初めて登場した手法が定常塔による強制法 (stationary tower forcing) である．ここでは $\mathbb{Q}_{<\kappa}$ と呼ばれている定常塔を紹介する．より一般的な定常塔については，[Larson 2004] を参照していただきたい．

定義 4.2 κ を到達不可能基数とする．集合 $\mathbb{Q}_{<\kappa}$ を

$$\mathbb{Q}_{<\kappa} = \{a \in V_\kappa : \forall x \in a,\ (|x| \leq \aleph_0), \cup a \neq \emptyset, a \text{ は } \mathcal{P}_{\aleph_1}(\cup a) \text{ の定常部分集合}\}$$

と定義する．$\mathbb{Q}_{<\kappa}$ 上に半順序 $\leq_{\mathbb{Q}_{<\kappa}}$ を以下のように定義する．$a, b \in \mathbb{Q}_{<\kappa}$ とすると，

$$a \leq_{\mathbb{Q}_{<\kappa}} b \iff \cup b \subseteq \cup a \wedge \forall x \in a\ (x \cap (\cup b) \in b).$$

G が $\mathbb{Q}_{<\kappa}$ ジェネリック・フィルターならば，定義域が $\mathbb{Q}_{<\kappa}$ の要素となる関数たちを使って超ベキ $\mathrm{Ult}(V, G)$ を G によるジェネリック拡大 $V[G]$ の中で構成できる．ウッディンは κ が超コンパクト基数ならば超ベキ $\mathrm{Ult}(V, G)$ が well-founded で下のような性質をもっていることに気づいた．

定理 4.3 κ を超コンパクト基数，G を $\mathbb{Q}_{<\kappa}$ ジェネリック・フィルターとすると，以下の (1)–(3) が成り立つ．

(1) 超ベキ $\mathrm{Ult}(V, G)$ は well-founded.

(2) $j : V \to M$ を G による V から M（$\mathrm{Ult}(V, G)$ の推移的崩壊）へのジェネリックな初等的埋め込みとすると，つぎが成り立つ．

  (i) j の臨界点は $\aleph_1^V$ で $j(\aleph_1^V) = \kappa$.

  (ii) $V[G]$ の中で M は長さ κ 未満の列に対して閉じている．

(3) κ を $\aleph_1$ とするレヴィ崩壊のジェネリック・フィルターとなっている H が存在し，$\mathbb{R}^{V[H]} = \mathbb{R}^{V[G]}$（つまり $V[H]$ と $V[G]$ は同じ実数をもつ）が成立する．

ソロヴェイの定理（定理 2.12）の証明により，κ を $\aleph_1$ とするレヴィ崩壊を施して得られるモデルの中では「$L(\mathbb{R})$ に含まれるすべての実数の集合はルベーグ可測で，ベールの性質と完全集合の性質を満たす」が成立している．しかし上の定理の (2) の (ii) と (3) より内部モデル M でも $L(\mathbb{R})$ に関する同じ命題が成立する．$j : V \to M$ が初等的埋め込みなので，V でも「$L(\mathbb{R})$ に含まれるすべての実数の集合はルベーグ可測で，ベールの性質と完全集合の性質を満たす」が成立する．この証明で興味深いことは，強制法が無矛盾性の証明ではなく集合の宇宙 V を直接解析する道具として使われている点である．ウッディンはこの定理の他にも定常塔を用いて重要な定理を証明した．その例を 4.2 節であげる．

その後の研究で，定理 4.3 の仮定の超コンパクト基数はより弱い巨大基数で代用できることが分かった．(1) と (2) を得るためには，κ がつぎに定義するウッディン基数であれば十分だし，κ がウッディン基数の極限となっているウッディン基数であれば (1)–(3) はすべて成立する．

定義 4.4　以下の条件が満たされるとき基数 κ はウッディン基数 (Woodin cardinal) と呼ばれる．すべての関数 $f : \kappa \to \kappa$ に対し，ある $\delta < \kappa$ で $f``\delta \subseteq \delta$ が成立し，δ を臨界点としてもつ初等的埋め込み $j : V \to M$ で $V_{j(f)(\delta)} \subseteq M$ となるものが存在する．

ウッディン基数は超コンパクト基数よりはるかに弱い巨大基数である．この巨大基数は「$L(\mathbb{R})$ に含まれる実数の集合の正則性」を導く巨大基数公理を

ウッディンとシェラが交互に弱めていって，最終的に見いだしたものである．現在ではさまざまな命題の無矛盾性を測るときにこのウッディン基数が使われている．たとえばシェラはつぎの定理を証明している．

定理 4.5 κ をウッディン基数とすると，κ を $\aleph_2$ とするあるジェネリック拡大の中では $\aleph_1$ 上の非定常イデアル $\mathrm{NS}_{\aleph_1}$ は $\aleph_2$ 飽和となる．

つまり「$\mathrm{ZFC} + \mathrm{NS}_{\aleph_1}$ は $\aleph_2$ 飽和」の無矛盾性の強さの上限は「ZFC+ ウッディン基数の存在」である．3.5 節で述べたスティールの定理（定理 3.78）により,「$\mathrm{ZFC} + \mathrm{NS}_{\aleph_1}$ は $\aleph_2$ 飽和 + 可測基数の存在」の無矛盾性の強さの下限は「ZFC + ウッディン基数の存在」である．よって「$\mathrm{NS}_{\aleph_1}$ は $\aleph_2$ 飽和」は，ウッディン基数とほぼ同等の無矛盾性の強さをもっていることが分かった．

フォアマン，マギドア，シェラやウッディンが得た結果をみて，それまで信じられてきた「(ZF + 決定性公理) は無矛盾性の意味においてすでに知られている巨大基数公理を ZFC に加えた公理系よりも強い」という予想が再検討されることになった．そしてマーティンとスティールはつぎの定理を証明した．

定理 4.6（[Martin and Steel 1989]） もし n 個のウッディン基数とその上に位置する可測基数が存在するなら，すべての $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}/\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$ 集合が決定的である．

上の定理よりウッディン基数が無限にあれば，すべての射影集合が決定的となることが分かった．マーティンとスティールは「無限個のウッディン基数とその上にある可測基数」という仮定からつぎのような驚くべき定理を証明した．

定理 4.7 もし無限個のウッディン基数たちの上に可測基数があれば $L(\mathbb{R})$ で決定性公理 AD が成立する．

そしてウッディンは (ZF + AD) の無矛盾性の強さを決定した．

定理 4.8 以下の (1)–(3) は同じ無矛盾性の強さをもつ．

(1) ZF + 決定性公理 (AD).

(2) ZFC + $L(\mathbb{R}) \models$AD.
(3) ZFC +「ウッディン基数が無限に存在する」.

このようにして「$\mathrm{NS}_{\aleph_1}$ は $\aleph_2$ 飽和」や決定性公理の無矛盾性の強さが以前考えられていたよりもはるかに弱いことが分かっていった.「$\mathrm{NS}_{\aleph_1}$ は $\aleph_2$ 飽和」や射影集合の決定性（とくに $\mathbf{\Sigma}^1_2/\mathbf{\Pi}^1_2$ 集合の決定性）の無矛盾性の強さに関する研究がある期間停滞していた原因は，巨大基数という物差しの上でそれらの命題の強さの目測を大きく誤っていたことであった.

マーティンとスティールはウッディン基数たちの内部モデルで，可能なかぎり単純な実数の整列順序をもつ内部モデルの存在を証明した.

定理 4.9（[Martin and Steel 1994]） もし n 個のウッディン基数が存在していれば，n 個のウッディン基数の内部モデルで実数の $\mathbf{\Delta}^1_{n+2}$ 整列順序をもつものが存在する.

定理 4.6 より n 個のウッディン基数[2)]があれば，$\mathbf{\Sigma}^1_n/\mathbf{\Pi}^1_n$ 決定性が満たされていることが分かる．そこで定理 3.46 から，n 個のウッディン基数をもつモデルではすべての実数の $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$ 集合がルベーグ可測でベールの性質と完全集合の性質を満たしている．これより定理 4.9 の内部モデルは $\mathbf{\Delta}^1_{n+2}$ より単純な実数の整列順序をもてないことが分かる.

これまでみてきたように，巨大基数を使った射影集合たちの解析は大きな成果をあげてきている．ゲーデルのプログラムは射影集合の解析に関しては成功したといってよいだろう.

4.2 基数の算術と巨大基数

さてここでいよいよ連続体仮説について考えてみよう．ゲーデルのプログラムは，連続体の問題を解決することができるのだろうか？

強制法が登場してまもなく，われわれが通常「巨大基数公理」と呼んでいる「○○基数が存在する」という形の公理からは，残念ながら連続体の濃度

2) ウッディン基数は可測基数の極限になっていることに注意.

は決められないことがレヴィとソロヴェイ [Levy and Solovay 1967] によって示された．彼らの証明により，もし κ が○○基数（○○には到達不可能，可測，超コンパクトなどなど）ならば，濃度 κ 未満の半順序集合を使って得られるジェネリック拡大の中でも κ は○○基数になっていることが分かる．そして濃度 κ 未満の半順序集合を使って $2^{\aleph_0}$ を $\aleph_1$ にも，$\aleph_2$ にも，$\aleph_{17}$ にもすることができるので，通常の巨大基数公理からは連続体の濃度を決めることはできない．

つぎに述べるイーストンの定理 [Easton 1970] から，正則基数のベキ集合の濃度について公理系 ZFC や (ZFC + 巨大基数公理) から言及できることは，ケーニヒの定理 ($cf(2^\kappa) > \kappa$) と "$\kappa \leq \lambda \Longrightarrow 2^\kappa \leq 2^\lambda$" だけだということが分かる．

定理 4.10　一般連続体仮説を仮定する．F は正則基数たちを定義域としてもち基数たちを値域としてもっている，つぎの性質を満たす（クラス）関数だとする．任意の正則基数 κ と λ に対し，

(1) $F(\kappa) > \kappa$.
(2) もし $\kappa \leq \lambda$ ならば $F(\kappa) \leq F(\lambda)$.
(3) $cf(F(\kappa)) > \kappa$.

このとき，あるジェネリック拡大の中では，すべての正則基数 κ に対し，$2^\kappa = F(\kappa)$ が成立している．

このように正則基数のベキの濃度は最小限度の制約さえ守れば，自由に決められる．たとえば $\aleph_{17}$ 未満の無限基数に対しては一般連続体仮説 "$2^\kappa = \kappa^+$" が成立するが，$2^{\aleph_{17}} = \aleph_{2006}$ となるモデルを強制法でつくることができる．イーストンの定理以降，多くの研究者は同様な結果が正則ではない基数（つまり特異基数）に関しても得られると考えていた．ところが 1975 年，シルバーがつぎの定理を証明することによって状況は一変した．

定理 4.11（[Silver 1975]）　κ を $cf(\kappa) > \aleph_0$ である特異基数とする．もし一般連続体仮説が κ 未満の基数に対して成立しているならば，$2^\kappa = \kappa^+$ となる．

つまり一般連続体仮説が成立しない場合，$2^\kappa \neq \kappa^+$ となる最小の基数は正則か $cf(\kappa) = \aleph_0$ となる特異基数でなければならない．シルバーが最初に与えた証明はジェネリック超ベキを使ったものであった．シルバーは同じ手法で，特異基数仮説（"$\kappa^{cf(\kappa)} = 2^{cf(\kappa)} \cdot \kappa^+$"）に関するつぎの定理も証明した．

定理 4.12（[Silver 1975]） もし特異基数仮説がすべての $cf(\kappa) = \aleph_0$ である基数 κ に対して成立するならば，すべての基数に対して特異基数仮説が成立する．

「特異基数仮説の否定」や「一般連続体基数が成立しない最小の基数が特異」は ZFC と無矛盾なのであろうか？ すでに 3.5 節でもみたように，イェンセンの被覆定理により，このいずれの命題からも $0^\#$ の存在が導けることが分かっている．それゆえこれらの命題が成立するモデルを強制法などで得るためには，無矛盾性の強さが少なくとも $0^\#$ 以上の仮定から出発する必要がある．

1968 年，プリックリーは学位論文においてのちにプリックリーの強制法 (Prikry forcing) と呼ばれることになる手法を発表した [Prikry 1970]．可測基数 κ が与えられているときにプリックリーの強制法を用いると，一つの基数も破壊することなく $cf(\kappa) = \aleph_0$ となるようなジェネリック拡大 $V[G]$ が得られる．さらにこの強制法はランク κ 未満の集合を増やさない ($V_\kappa^{V[G]} = V_\kappa^V$) ことが分かっている．シルバーは 1971 年に 1 拡張可能基数 (1-extendible cardinal) という非常に強い巨大基数を使って，(ZFC +「$2^\kappa \neq \kappa^+$ となる可測基数 κ が存在」) のモデルを得た．シルバーはこのモデルをプリックリーの強制法で拡張して，「κ は $cf(\kappa) = \aleph_0$ で，$2^\kappa > \kappa^+$ となる強極限特異基数」のモデルを得た．しかしそのモデルでは $\kappa^{cf(\kappa)} = 2^\kappa$ となっている[3]ので，特異基数仮説は（κ で）成立していない．これによって (ZFC +「1 拡張可能基数が存在する」) が無矛盾ならば，(ZFC +「特異基数仮説の否定」) も無矛盾であることが示された．現在では「特異基数仮説の否定」の無矛盾性の強さは 1 拡張可能基数よりもずっと弱いことが分かっている．その強さを確定し

---

3) 一般に極限基数 λ に対し，$2^\lambda = (2^{<\lambda})^{cf(\lambda)}$ が成り立つ．

たギティックの定理とそれまで知られていたことをまとめるとつぎのようになる．

定理 4.13　以下の (1)–(4) は同じ無矛盾性の強さをもつ．

(1) 特異基数仮説の否定．つまり $\kappa^{cf(\kappa)} \neq 2^{cf(\kappa)} \cdot \kappa^+$ となる特異基数 κ が存在する．
(2) 強極限特異基数で $2^\kappa > \kappa^+$ となるものが存在する．
(3) 可測基数 κ で $o(\kappa) = \kappa^{++}$ となるものが存在する．
(4) 可測基数 κ で $2^\kappa > \kappa^+$ となるものが存在する．

(3) の $o(\kappa)$ は「ミッチェル位数 (Mitchell order)[4]」と呼ばれるもので，可測基数 κ の「強さ」を測る順序数で，“$o(\kappa) = 1$” は単に「κ は可測基数」を意味する．$o(\kappa)$ が大きいほど可測基数 κ の無矛盾性の強さは増す．κ^{++} は $o(\kappa)$ の最大値である．

マギドア [Magidor 1977a] は，特異基数仮説が $\aleph_\omega$ で成立しないモデルをつくった．このマギドアのモデルでは，$\aleph_\omega$ の下に一般連続体仮説が成立しない基数が非有界にある．また上で述べたプリックリーの強制法によって得られた「特異基数仮説の否定」のモデルでも，特異基数 κ の下に一般連続体仮説が成立しない基数が非有界にある．そしてマギドア [Magidor 1977b] は超コンパクト基数とその上にある膨大基数から，$\aleph_\omega$ 未満の基数で一般連続体仮説が成立し，$2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+2}$ となっているモデルをつくった．現在では，より弱い巨大基数公理からこのようなモデルが得られることが，ウッディンとギティック [Gitik 1989] の研究により知られている．

定理 4.14　可測基数 κ で $o(\kappa) = \kappa^{++}$ となるものが存在すれば，$\aleph_\omega$ 未満の基数で一般連続体仮説が成立し，$2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+2}$ となっているジェネリック拡大が存在する．

またマギドアとシェラによって，$\aleph_\omega$ 以下で一般連続体仮説が成立していてもある程度は $2^{\aleph_\omega}$ の値に自由度があることや，$\aleph_{\omega_1}$ が強極限[5]となっていても $2^{\aleph_{\omega_1}}$ の値にいくらか自由度があることが分かった．

4) ミッチェル位数の定義はイェック [Jech 2003] を参照していただきたい．
5) 基数 κ が強極限とは，すべての基数 $\delta < \kappa$ に対し $2^\delta < \kappa$ が成立することである．

定理 4.15 超コンパクト基数が存在するならば，以下が成り立つ．

(1) どんな順序数 $\alpha < \omega_1$ に対しても，$\aleph_\omega$ 未満の基数で一般連続体仮説が成立し $2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+\alpha+1}$ となっているジェネリック拡大が存在する．
(2) どんな順序数 $\alpha < \omega_2$ に対しても，$\aleph_{\omega_1}$ が強極限基数で $2^{\aleph_{\omega_1}} = \aleph_{\omega_1+\alpha+1}$ となっているジェネリック拡大が存在する．

しかしつぎのシェラの定理が示すように，$\aleph_\omega$ 未満で一般連続体仮説が成立しているならば $2^{\aleph_\omega}$ の値に上界を与えることができる．

定理 4.16（[Shelah 1994]） 任意の極限順序数 δ に対し，

$$\aleph_\delta^{|\delta|} < \max\left\{\aleph_{|\delta|^{+4}}, \left(2^{|\delta|}\right)^+\right\}$$

が成立する．ここで $|\delta|^{+4}$ とは $|\delta|$ の 4 番目の後続基数を意味する．

上の定理より，もし $2^{\aleph_0} < \aleph_\omega$ ならば $\aleph_\omega^{\aleph_0} < \aleph_{\omega_4}$ となっている．ゆえに $\aleph_\omega$ が強極限基数ならば，$2^{\aleph_\omega} < \aleph_{\omega_4}$ が成立する．この驚くべき定理をシェラは pcf 理論 (theory of possible cofinalities of ultraproducts of sets of regular cardinals) という分野を独力で開拓することで得た．シェラの集合論での成果については，次章でさらに述べることにする．

フォアマンとウッディンは，非常に強い巨大基数公理から出発して一般連続体仮説がすべての無限基数において成立しないモデルを得た．その後ウッディンによってこの定理の仮定の巨大基数公理は弱められた．つぎの定理の (1) はウッディン，(2) はカミングス [Cummings 1992] による．(2) の仮定で使っている「強基数 (strong cardinal)」とはウッディン基数より弱く，可測基数より強い巨大基数公理である．その定義は [Kanamori 1994 邦訳] を参照していただきたい．

定理 4.17 つぎが成り立つ．

(1) もし (ZFC＋「超コンパクト基数の存在」)[6] が無矛盾ならば，(ZFC＋「すべての基数 κ に対して $2^\kappa = \kappa^{++}$ が成立する」) も無矛盾である．

6) ウッディンはのちに，より弱い巨大基数から同じ結論が得られることを示した．

(2) もし (ZFC +「強基数が存在する」) が無矛盾ならば，(ZFC +「すべての後続基数 κ に対して $2^\kappa = \kappa^+$ が成立して，すべての極限基数 λ に対して $2^\lambda = \lambda^{++}$ が成立する」) も無矛盾である．

この節ではこれまで巨大基数公理が基数の算術に関するいろいろな命題を満たすモデルをつくり上げるために使われることをみてきた．つぎのソロヴェイの定理から強コンパクト基数の存在が基数の算術に直接影響することが分かる．

定理 4.18 ([Solovay 1974]) 強コンパクト基数より大きい基数に対しては，特異基数仮説が成立する．

ゆえに強コンパクト基数より大きい強極限特異基数 κ に対しては $2^\kappa = \kappa^+$ が成立する．

無矛盾性の強さの意味で巨大基数公理とみなすことができる命題で，基数の算術に影響を及ぼすものもある．$\aleph_1$ 上の非定常イデアル $\mathrm{NS}_{\aleph_1}$ が $\aleph_2$ 飽和となっているモデルを，フォアマンとマギドアとシェラが超コンパクト基数から得たことは 4.1 節で述べた．彼らのモデルでは $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ となっていた．そこで「$\mathrm{NS}_{\aleph_1}$ が $\aleph_2$ 飽和」と連続体仮説のモデルをつくる努力がなされたが成功しなかった．その後ウッディンのつぎの定理によって (ZFC +「$\mathrm{NS}_{\aleph_1}$ が $\aleph_2$ 飽和」+ 連続体仮説) のモデルをつくることはとても難しいことがわかった．

定理 4.19 ([Woodin 1999]) $\mathrm{NS}_{\aleph_1}$ が $\aleph_2$ 飽和で可測基数が存在しているならば，$2^{\aleph_0} \geq \aleph_2$.

実は上の定理は，下で述べるウッディンが証明したより興味深い定理の系である．この定理を述べるにはつぎの定義が必要である．

定義 4.20 任意の自然数 $n > 0$ に対し，

$$\boldsymbol{\delta}^1_n = \sup\{|{<}| : {<} \text{ は実数の } \boldsymbol{\Delta}^1_n\text{-prewellordering}\}$$

とする．ただし prewellordering は整列順序の定義から反対称法則を除いたもので，$|{<}|$ は $<$ の長さを意味する．

$\boldsymbol{\delta}^1_n$ の計算は射影集合の研究にとって重要な課題であった．ウッディンは上の定理の仮定のもとで $\boldsymbol{\delta}^1_2$ が計算できることを示した．

定理 4.21 $\mathrm{NS}_{\aleph_1}$ が $\aleph_2$ 飽和で可測基数が存在しているならば，$\boldsymbol{\delta}^1_2 = \aleph_2$.

この定理とよく知られている $\boldsymbol{\delta}^1_n < (2^{\aleph_0})^+$ という事実から定理 4.19 は導ける．$\boldsymbol{\delta}^1_2 = \aleph_2$ を仮定すると，連続体仮説の反証となる射影集合の存在が示されるということである．これは多くの研究者にとって予想外の結果であった．

このように基数の算術について，現在でも興味深いさまざまな結果が得られている．また巨大基数公理も，それより直接に連続体仮説の正否を決定することはできないが，基数の算術の研究にさまざまな形で使われていることがお分かりいただけたと思う．

第5章

最前線へ

最後にゲーデルのプログラムの流れを受け継いでいると思われる最近のウッディンによる成果と，その流れとは異なった視点で集合論の研究の最前線を切り開いているシェラの考えの一端を手短かに紹介する．

これまでみてきたように，巨大基数公理と強制法を用いることによって，さまざまな命題を満たす集合論のモデルがつくられてきた．ある意味では巨大基数公理は集合論のモデルの多様性をもたらしていると考えることも可能である．しかし射影集合の正則性のケースから分かるように，巨大基数がある条件を満たす集合たちについてはそれらに関する命題の正否を決定することも知られている．また正否を決定できなくても，巨大基数の存在がそれらの正否を強制法に影響されないようにすることがある．定常塔を使って証明されるつぎのウッディンの定理も，その一例である．$\mathrm{Th}(L(\mathbb{R}))$ は「$L(\mathbb{R})$ の理論 (theory)」と呼ばれ，$L(\mathbb{R})$ で成立する閉論理式全体を意味する．

定理 5.1　もしもウッディン基数が非有界に存在するならば，どんな半順序集合を使った強制法でジェネリック拡大をとっても $\mathrm{Th}(L(\mathbb{R}))$ は変化しない．

つまりこの定理の仮定が成立していれば，$L(\mathbb{R})$ の理論は通常の強制法では変化させられない．このことを「ウッディン基数が非有界に存在するなら，$L(\mathbb{R})$ の理論は強制法に対し強固 (rigid) である」ということもある．

論理式 $\varphi(x)$ で x の変域は実数とする．$\varphi(x)$ が Σ^2_1 とはこの論理式が $\exists A \subseteq \mathbb{R}$，$\psi(A, x)$ という形をしており論理式 $\psi(A, x)$ に現れる量化子の領域は実数

か自然数のみとなっていることを意味する．連続体仮説は Σ^2_1 の論理式で表現できる．その他にも集合論のいろいろな命題が Σ^2_1 の論理式で表現できることが知られている．そのような命題を Σ^2_1 命題と呼ぶ．ウッディンはつぎの定理を証明することによって「十分強い巨大基数公理があれば，すべての Σ^2_1 命題の正否を連続体仮説が決める」と主張した．

定理 5.2（[Woodin 1999]） それ自身が可測基数となっているウッディン基数が非有界に存在すると仮定する．連続体仮説が成立しているならば，どんな半順序集合を使った強制法でジェネリック拡大をとってもそこで連続体仮説が成立しているかぎり Σ^2_1 命題の正否は変わらない．

その後ウッディンは上のような強制法では変化させられない理論の研究を進めていった．そして巨大基数公理のもとで Ω ロジックというシンタックスをもたないロジックを使うことを提唱した [Woodin 2001]．ウッディンは構造 $\mathcal{H}(\omega_2)$[1)] の中で Σ_2 の論理式を使って表現できる命題に対し Ω 完全な理論が存在することを示した．さらにこの $\mathcal{H}(\omega_2)$ の Σ_2 理論は強制法で変化させられないことを証明した．そしてこのような条件を満たす理論からは，必ず $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ が導けることを証明した．ウッディンのこれらの結果が連続体問題を解決したと考えている研究者もいるようだが，その考えが今後より多くの研究者たちに受け入れられていくかは定かではない．しかしこのウッディンによる一連の研究が，ゲーデルのプログラムの考えに沿ったものでこれからの集合論の流れに大きな影響を及ばすことは間違いないだろう．

これまで巨大基数公理を使ったゲーデルのプログラムを中心に，集合論の発展をたどってきた．しかし「実数に関する基数不変量 (cardinal invariant) の研究」などここでは触れることのできなかった集合論の重要な分野が数多くある．またゲーデルのプログラムやそれの根拠となっているプラトニズムも，必ずしも集合論の研究者たちに無条件に支持されているわけではない．たとえばウッディンと並んで現在最も影響力の大きい研究者であるシェラは，自らがプラトニストであると認めつつも巨大基数公理を ZFC に加えて集合の宇宙について探求していくという考えには懐疑的であるようだ．シェラは「集

1) $\mathcal{H}(\omega_2)$ の定義は [Kunen 1980] を参照．

合論の未来 (The Future of Set Theory)」と題された講演で「定理を証明するというのは，ZFC から証明するということである」,「強制法はどんな命題が証明不可能か知るために必要」で「(幸運な偶然によって線形に順序づけられている) 巨大基数たちはいくつかの無矛盾性の証明のために必要」と述べている．シェラは縦横無尽に強制法を（時として巨大基数を活用し）駆使して数多くの命題の（相対）無矛盾性を証明してきた．ある命題の否定が ZFC と無矛盾であることを示すことで，その命題が ZFC から証明不可能なことが分かる．どうやらシェラはこのようなプロセスを経ることによって，ZFC での定理を発見できると主張しているようである．彼はこれを「ゴミ (trash) を取り除いていって，最終的に金を発見する」というふうに表現している（しかしこのような方法で金脈を発見するためには，強制法に関してシェラのような卓越した能力が必要だろう）．pcf 理論やつぎの定理は，シェラがそのような方法で得た成果なのであろう．

定理 5.3（[Shelah 1982]） κ を任意の正則基数とする．ジェネリック拡大の中で $cf(\kappa) \neq cf(|\kappa|)$ となっているならば，その拡大の中では $(\kappa^+)^V$ は基数ではない．

シェラはこの定理を用いてつぎの系を得た．

系 5.4 κ が $\aleph_2$ 以上の後続基数（つまり $\kappa = \delta^+$ となる基数 $\delta > \aleph_0$ が存在する）ならば，κ 上の非定常イデアル NS_κ は κ^+ 飽和にならない．

さらにギティックとシェラ [Gitik and Shelah 1997] は club 推測列 (club guessing sequence) という手法を用いて，正則極限基数 κ に関しても NS_κ は κ^+ 飽和にならないことを示した．これによってつぎの定理の証明が完成した．

定理 5.5 もしも κ が $\aleph_2$ 以上の正則基数ならば，κ 上の非定常イデアル NS_κ は κ^+ 飽和にならない．

巨大基数公理から (ZFC + 「$\mathrm{NS}_{\aleph_1}$ の $\aleph_2$ 飽和性」) の無矛盾性が得られることは，4.1 節で述べた．これにより「非定常イデアルの飽和性」（の可能

性）は $\aleph_1$ 特有の性質であるという興味深い結果が得られた．上の定理やシェラの「$2^{\aleph_0} < \aleph_\omega$ ならば $\aleph_\omega^{\aleph_0} < \aleph_{\omega_4}$」という定理は，公理系 ZFC での定理であることに注目していただきたい．シェラは「無矛盾性に関する命題のような例外を除けば，ZFC はわれわれの直観を汲み尽くしていると感じる ("My feeling is that ZFC exhausts our intuition except for things like consistency statements")」と述べている．

このように現代の集合論を代表する研究者 2 人の間にも，巨大基数公理やゲーデルのプログラムに関する考えには大きな隔たりがある．ゲーデル以降の集合論の流れに関して，何が中心的なテーマだったかについても研究者らの考え方は多種多様であろう．これまで述べてきたゲーデルのプログラムに関する考えには，筆者の偏見が投影されているはずである．より偏りの少ない考えに触れるためには，[Kanamori 1994 邦訳] や [Jech 2003] などのテキストを参照していただきたい．

終わりに一言．昔々（まだゲーデルが健在だった頃）竹内外史先生の「集合論未開の領域に挑め」というタイトルの刺激的な文章を目にした．その結びに「この分野は現代数学の new frontier である．若者よ大志をもて，未開の領域に挑め！」とあったことを，今でも鮮明に憶えている．当時はまさに集合論が強制法と巨大基数の理論を得て，frontier を切り開くための第一歩を踏み出したところであった．それ以来多くの研究者の努力によって集合論は驚くほど前進した．これからもより洗練された理論と手法により，その frontier は推し進められていくことだろう．本書を読まれて集合論の研究に興味をもっていただけたら幸いである．

参考文献

[Banach 1930] Banach, S., "Über additive Massfunktionen in abstrakten Mengen," *Fundamenta Mathematicae*, **15** (1930), 97–101.

[Banach and Kuratowski 1929] Banach, S. and Kuratowski, K., "Sur une généralisation du problème de la mesure," *Fundamenta Mathematicae*, **14** (1929), 127–131. Reprinted in Hartman, S. and Marczewski, E. (eds.), *Oeuvres*, volume 1, Państwowe Wydawnidwo Naukowe (1967), 182–186. And Borsuk, K. *et al.* (eds.), *Selected Papers*, Państwowe Wydawnidwo Naukowe (1988), 327–331.

[Becker 1992] Becker, H. S., "Descriptive set theoretic phenomena in analysis and topology," in Haim Judah, H., Just, W., and Woodin, W. H. (eds.), *Set Theory of the Continuum*, Mathematical Sciences Research Institute publication 26, Springer-Verlag (1992), 203–214.

[Bukovský 1965] Bukovský, L., "The continuum problem and the powers of alephs," *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, **6** (1965), 181–197.

[Cummings 1992] Cummings, J., "A model in which GCH holds at successors but fails at limits," *Transactions of the American Mathematical Society*, **329**, no.1 (1992), 1–39.

[Devlin and Jensen 1975] Devlin, K. J. and Jensen, R. B., "Marginalia to a theorem of Silver," in Müller, G. H., Oberschelp, A. and Potthoff, K. (eds.), $\models$*ISILC Logic Conference*, Proc. Internat. Summer Inst. and Logic Colloq., Kiel (1974), Lecture Notes in Mathematics 499, Springer (1975), 115–142.

[Dodd and Jensen 1981] Dodd, A. J. and Jensen, R. B., "The core model," *Annals of Mathematical Logic*, **20**, no.1 (1981), 43–75.

[Easton 1970] Easton, W. B., "Powers of regular cardinals," *Annals of Mathematical Logic*, **1** (1970), 139–178.

[Gitik 1989] Gitik, M., "The negation of the singular cardinal hypothesis from $o(\kappa) = \kappa^{++}$," *Annals of Pure and Applied Logic*, **43**, no.3 (1989), 215–240.

[Gitik and Shelah 1997] Gitik, M. and Shelah, S., "Less saturated ideals," *Proceedings of the American Mathematical Society*, **125**, no.5 (1997), 1523–1530.

[Gödel 1938] Gödel, K. F., "The consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis," *Proceedings of the National Academy of Science U.S.A.*, **24** (1938), 556–557. Reprinted in [Gödel 1990] below, 26–27.

[Gödel 1947] Gödel, K. F., "What is Cantor's Continuum Problem?," *American Mathematical Monthly*, **54** (1947), 515–525. Errata **55** (1948), 151. Reprinted in [Gödel 1990] below, 176–187. Revised and expanded version in [Gödel 1964], 258–273. This version reprinted with minor emendations by the author in [Gödel 1990] below, 254–270.

[Gödel 1964] "Revised and expanded version of Gödel 1947," in Benacerraf, P. and Putnam, H. (eds.), *Philosophy of Mathematics : selected readings*, Englewood Cliffs, N. J. : Prentice-Hall; Oxford: Blackwell, 258–273. 邦訳：岡本賢吾訳「カントールの連続体問題とは何か?」in [飯田 1995].

[Gödel 1990] Feferman, S. *et al.* (eds.), *Collected Works*, volume 2, Oxford University Press (1990).

[Harrington 1978] Harrington, L. A., "Analytic determinacy and $0^{\#}$," *Journal of Symbolic Logic*, **43** (1978), 685–693.

[Jech 2003] Jech, T. J., *Set Theory, The Third Millennium Edition, Revised and Expanded* (Springer monographs in mathematics), Springer (2003).

[Jech *et al.* 1980] Jech, T. J., Magidor, M., Mitchell, W. J., and Prikry, K. L., "Precipitous ideals," *Journal of Symbolic Logic*, **45**, no.1 (1980), 1–8.

[Jech and Prikry 1979] Jech, T. J. and Prikry, K. L., "Ideals over uncountable sets: Application of almost disjoint functions and generic ultrapowers," *Memories of the American Mathematical Society*, **214** (1979), 18.

[飯田 1995] 飯田隆編『リーディングス 数学の哲学 ゲーデル以後』勁草書房 (1995).

[Kanamori 1994] Kanamori, A., *The Higher Infinite*, Perspectives in Mathematical Logic, Springer-Verlag (1994). 邦訳：渕野昌訳『巨大基数の集合論』シュプリンガー・フェアラーク (1998).

[Kechris 1984] Kechris, A. S., "The Axiom of Determinacy implies dependent choices in $L(\mathbb{R})$," *Journal of Symbolic Logic*, **49** (1984), 161–173.

[Kunen 1971] Kunen, K., "Elementary embeddings and infinitary combinatorics," *Journal of Symbolic Logic*, **36** (1971), 407–413.

[Kunen 1978] Kunen, K., "Saturated ideals," *Journal of Symbolic Logic*, **43** (1978), 65–76.

[Kunen 1980] Kunen, K., *Set Theory: An introduction to Independence Proofs,* North-Holland (1980).

[Larson 2004] Larson, P. B., *The Stationary Tower : notes on a course by W. Hugh Woodin* (University lecture series), American Mathematical Society (2004).

[Levy and Solovay 1967] Levy, A. and Solovay, R. M., "Measurable cardinals and the continuum hypothesis," *Israel Journal of Mathematics*, **5** (1967), 234–248.

[Magidor 1977a] Magidor, M., "On the singular cardinals problem. I," *Israel Journal of Mathematics*, **28**, no.1–2 (1977), 1–31.

[Magidor 1977b] Magidor, M., "On the singular cardinals problem. II," *Annals of Mathematics* (2), **106**, no.3 (1977), 514–547.

[Magidor 1980] Magidor, M., "Precipitous ideals and Σ^1_4 sets," *Israel Journal of Mathematics*, **35**, no. 1–2 (1980), 109–134.

[Martin 1970] Martin, D. A., "Measurable cardinals and analytic games," *Fundamenta Mathematicae*, **66** (1970), 287–291.

[Martin 1975] Martin, D. A., "Borel determinacy," *Annals of Mathematics*, **102** (1975), 363–371.

[Martin 1976] Martin, D. A., "Hilbert's first problem: The continuum hypothesis," in Browder, F. E. (ed.), *Mathematical Developments Arising Form Hilbert Problems,* Proceedings of symposia in pure mathematics volume 28 Providence, American Mathematical Society (1976), 81–92.

[Martin 1980] Martin, D. A., "Infinite games," in Lehto, O. (ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Helsinki, Academia Scientiarum Fennica (1980), 269–273.

[Martin and Solovay 1970] Martin, D. A. and Solovay, R. M., "Internal Cohen extensions," *Annals of Mathematical Logic*, **2** (1970), 143–178.

[Martin and Steel 1989] Martin, D. A. and Steel, J. R., "A proof of Projective Determinacy," *Journal of the American mathematical Society*, **2** (1989), 71–125.

[Martin and Steel 1994] Martin, D. A. and Steel, J. R., "Iteration trees," *Journal of the American Mathematical Society*, **7** (1994), 1–73.

[Moschovakis 1980] Moschovakis, Y. N., *Descriptive Set Theory,* North-Holland (1980).

[Mycielski and Steinhaus 1962] Mycielski, J. and Steinhaus, H., "A mathematical axiom contradicting the axiom of choice," *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques*, **10** (1962), 1–3. Reprinted in Steinhaus, H. in Marczewski, E. *et al.* (eds.), *Selected Papers,* Państwowe Wydawnictwo Naukowe (1985), 778–781.

[Prikry 1970] Prikry, K. L., "Changing measurable into accessible cardinals," *Dissetationes mathematicae* (*Rozprawy Matematyczne*), **68** (1970), 5–52.

[Scott 1961] Scott, D. S., "Measurable cardinal and constructible sets," *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques*, **9** (1961), 521–524.

[Shelah 1982] Shelah, S., *Proper Forcing,* Lecture Notes in Mathematics 940, Springer-Verlag (1982).

[Shelah 1984] Shelah, S., "Can you take Solovay's inaccessible away?," *Israel Journal of Mathematics*, **48** (1984), 1–47.

[Shelah 1994] Shelah, S., *Cardinal Arithmetic,* Oxford Logic Guides 29, The Clarendon Press, Oxford University Press (1994).

[Silver 1975] Silver, J. H., "On the singular cardinals problem," in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Vancouer, B.C., 1974* volume 1. Canad. Math. Congress, Montreal, Que. (1975), 265–268.

[Solovay 1966] Solovay, R. M., "Real-valued measurable cardinals (abstract)," *Notices of the American Mathematical Society*, **13** (1966), 721.

[Solovay 1969] Solovay, R. M., "The cardinality of Σ^1_2 sets of reals," in Bulloff, J. J., Holyoke, T. C., and Hahn, S. W. (eds.), *Foundations of Mathematics— Symposium Papers Commemorating the Sixtieth Birthday of Kurt Gödel*, Springer-Verlag (1969).

[Solovay 1970] Solovay, R. M., "A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable," *Annals of Mathematics*, **92** (1970), 1–56.

[Solovay 1971] Solovay, R. M., "Real-valued measurable cardinals," in Scott, D. S. (ed.), *Axiomatic Set Theory* Proceedings of Symposia in Pure Mathematics volume 13, part 1, Providence, American Mathematical Society (1971), 397–428.

[Solovay 1974] Solovay, R. M., "Strongly compact cardinals and the GCH," in Henkin *et al.* (eds.), *Proceedings of the Tarski's Symposium*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics volume 25, Providence, American Mathematical Society (1974), 365–372.

[Steel and van Wesep 1982] Steel, J. R. and van Wesep, R. A., "Two consequences of determinacy consistent with choice," *Transaction of the American Mathematical Society*, **272** (1982), 67–85.

[Suslin 1920] Suslin, M. Y., "Proplème 3," *Fundamenta Mathematicae*, **1** (1920), 223.

[Suzuki（鈴木晃）1999] Suzuki, A., "No elementary embedding from V into V is definable from parameters," *The Journal of Symbolic Logic*, **64**, no.4 (1999), 1591–1594.

[Ulam 1930] Ulam, S. M., "Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre," *Fundamenta Mathematica*, **16** (1930), 140–150.

[Woodin 1983] Woodin, W. H., "Some consistency results in ZFC using AD," in Kechris, A. S., Martin, D. A., and Moschovakis, Y. N. (eds.), *Cabal Seminar 79–81,* Proceedings, Caltech-UCLA Logic Seminar 1979–1981, Lecture Notes in Mathematics 1019, Springer-Verlag (1983), 172–198.

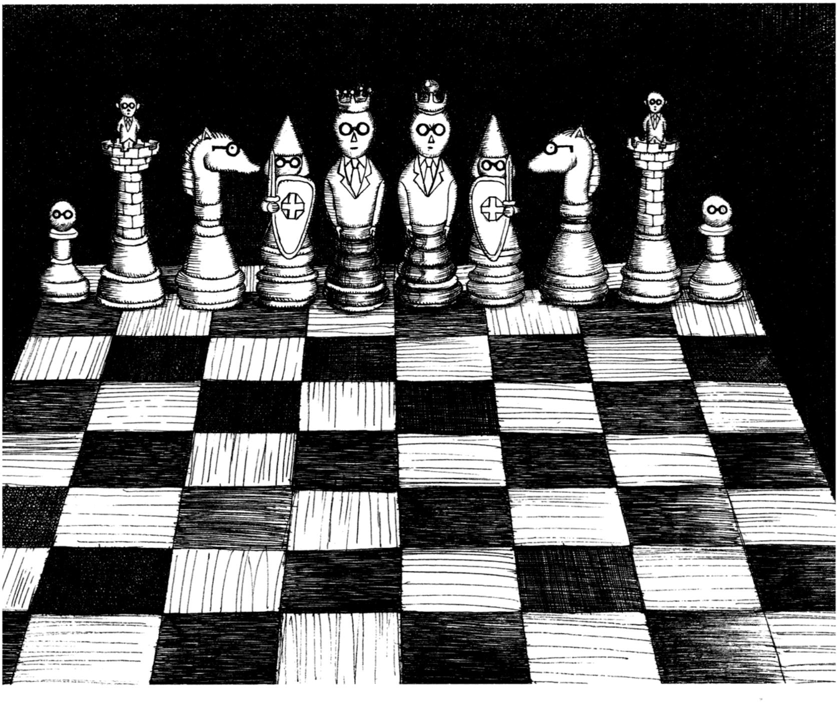
[Woodin 1999] Woodin, W. H., *The Axiom of Determinacy, Forcing Axioms, and the Nonstationary Ideal*, Walter de Gruyter & co., (1999).

[Woodin 2001] Woodin, W. H., "The Continuum Hypothesis, I & II," *Notices, American Mathematical Society*, **48**-6 (2001), 567–576 & **8**–7 (2001), 681–690.

III

ゲーデルのプラトニズムと数学的直観

戸田山和久



ゲーデルがプラトニストであったことはよく知られている．しかし，哲学の世界では，「ゲーデル的プラトニズム」という呼称は，よくいえば荒削りな，悪くいえば素人くさい仕方で主張される，哲学的に洗練されない数学的実在論を指すものとして，ほとんど蔑称スレスレの言葉として使われてきた．

ゲーデルのプラトニズムに対する哲学者の典型的な評価をつぎの引用にみることができる．

> (1) ゲーデルが訴えている，この〈公理が真であるものとしてわれわれに迫ってくる経験〉とはどのようなものなのか．そしてどれほど多くの人々がそのような経験をしたことがあるのか．それはどのような種類の人々なのか．そしてそれはどのような条件のもとでなのか．確かに，それほど不特定で曖昧な性質のデータに依存して集合の存在を擁護する議論には疑わしいところがある．そこでは最も初歩的な種類のコントロールもテストもなされてこなかったのである．その議論は，神の存在についての信念を正当化するために曖昧に「神秘的経験」と記述される経験に訴えるのに似ている．[Chihara 1982, p.215, 邦訳 p.101]

チャールズ・チハラはゲーデルのプラトニズムをはじめてまともな哲学的分析の俎上に載せた哲学者だが，そのチハラをもってしてもこのような冷淡な評価なのである．もう一つ引用しよう．

> (2) ゲーデルの見解の支持者ですら，その見解には受け入れがたいところがあるということを認めざるをえない．数学者は物理的空間に存在しない対象について理論をつくるものとして描かれる．これにより，数学は伝統的形而上学とさして変わるところのないひどく思弁的な仕事にみえてくる．こうした対象についてわれわれはいかにして知識をもてるのかを説明するために，神秘的な能力が措定される．ゲーデルは集合が存在するという自分の信念を正当化するために，数学的知覚に訴えるが，それはある種の哲学者が神が存在するという信念を正当化しようとして神秘的経験に訴えてきたのと驚くほどよく似ている．こうなると数学

は一種の神学にみえてくるのである．数学における存在の問題について他のアプローチが試みられてきたのはしごく当然である．[Chihara 1990, p.21]

というわけで，ゲーデルの見解を笑い飛ばしたら，さっさともっとまともな他の見解を相手にすることにしましょうね，といわんばかりの態度なのだが，これはチハラにかぎらず多くの哲学者に共通した傾向だったといえる．それは無理もない．なぜなら，1995 年に『ゲーデル全集 III：未公刊論文と書簡』が出版されるまで，プラトニズムに関連するゲーデルの哲学的論文のうちわれわれが直接目にすることのできたのはたった二つ（1944 年の「ラッセルの数理論理学」と 1947 年の「カントルの連続体問題とは何か」）しかなかったのだから．

しかし，風向きは変わってきた．全集の出版のおかげで，ゲーデルが残した膨大な未公刊資料や書簡が誰にでもアクセスできるようになったことにより，「ゲーデルのプラトニズム」が本当のところはどのようなものであったのかの研究が精力的に行われるようになってきた．その結果，ゲーデル自身が考えていたプラトニズムは，どうやらこれまで彼に帰されてきた神学的・神秘主義的なプラトニズムとはかなり趣を異にするらしい，ということが分かってきた．本稿では，全集出版以降の研究動向をふまえて，ゲーデルのプラトニズムとはどのような主張だったのか，そしてそれがどのように展開していったのかを，できるかぎり年代順にサーヴェイすることを目指す．そして，いわばその副産物として，どうして「神秘主義者ゲーデル」というゲーデル像ができあがってしまったのかを解明しよう．

まず，本稿で主に扱われるテキストとそれが執筆された年代を示しておこう．

1933　講演「数学の基礎における現状について」

1944　論文「ラッセルの数理論理学」

1947　論文「カントルの連続体問題とは何か」

1951　ギブス講義「数学基礎論におけるいくつかの基本的定理とその帰結」

1953　未公刊論文「数学は言語の統語論か？」第 3 草稿

1959　未公刊論文「数学は言語の統語論か？」第 5 草稿

1961　講演草稿「哲学からみた数学基礎論の現代的展開」

1964　「カントルの連続体問題とは何か」改訂版と補遺[1)]

さて，準備はこれくらいにして，まずはゲーデルがいつからプラトニストなのかという問いからはじめることにしよう．

1)　1944，1951，1953，1964 にはそれぞれ邦訳がある．ゲーデルのテキストからの引用に際しては，これらの邦訳を参考にし，邦訳になるべく沿った形で引用させていただいた．ただし，文体・表記・訳語の統一や解釈上の相違などにより，邦訳を改変させていただいた箇所もある．訳者の皆さんにお許しを乞うとともに御礼を申し上げたい．

第1章
ゲーデルはいつからプラトニストなのか

1.1　間接的証拠のいくつか

ゲーデルの死の 4 年前にあたる 1974 年，テキサス大学で社会学を学ぶ大学院生だったバーク・グランジャンは，若き日のゲーデルの知的成長について尋ねる質問紙を本人に送りつけた．目的は，20 世紀前半の中欧における知的社会の状況を調べることだったようだ．タイミングが悪く，ゲーデルはそのとき前立腺の病気から回復したばかりだったので，この手紙は無視されてしまった．グランジャンはずいぶん熱心な人だったとみえて，何度か催促の手紙を書いたり，ついにはゲーデルに直接電話したりした結果，ゲーデルが質問紙に回答を書き込むところまではどうやらこぎつけた．ところがこの質問紙自体はグランジャンには返送されなかった．ゲーデルの死後，書き込みのある質問紙が遺稿の中からみつかり，『ゲーデル全集 IV』に収録されている [Gödel IV, pp.446–469]．その中につぎのような質問項目がある．

> 8. あなたの哲学的傾向はある人々によって「数学的実在論」と呼ばれてきました．それによれば，数学的概念と定理は何らかの種類の対象を記述しているものとみなされるとのことですが，
>
> (a) こうした特徴づけはどの程度正しいでしょうか．

(b) とりわけ，あなたの後の立場と比べて，1920 年代と 30 年代初期におけるあなたの見解を，これはどの程度よく表しているでしょうか．

(c) あなたの哲学の発展において，とくに重要だと思われる影響がおありでしょうか．

この三つの質問に対して，ゲーデルは，「数学的概念」の上に「と集合」を書き込んだ上で，(a) には「正確である (correct)」，(b) には「1925 年以前から私の立場であった」，(c) には「ゴンペルツの哲学の講義とフルトヴェングラーの数学」と答えている．ゲーデルの回顧が正しいとするなら，ゲーデルはウィーン大学に入学する前の 10 代後半から数学的実在論者だった（と少なくとも自分では思っていた）ことになる．だとすると，相当筋金入りのプラトニストである．

また，さらに間接的になってしまうが，1967 年 12 月 7 日付けのハオ・ワンへの手紙もゲーデルがかなり初期から数学について実在論的な見解を抱いていたことの証拠としてしばしば言及される [Gödel V, pp.396–399]．ただし，この中で，ゲーデルは自分がプラトニストであるとも実在論者であるとも明言はしていない．この手紙は，まずワンがスコーレムについて論じた原稿をゲーデルに送ってコメントを求め，それに対する返信として書かれたものである．その中でゲーデルは，なぜスコーレムやその他の論理学者たちが述語論理の完全性定理を証明できなかったかを説明し，その理由はメタ数学から非有限的な推論を排除すべきだという有限主義的「偏見」にあるとした上で，その偏見を批判しているのだが（この批判は，「数学は言語の構文論か？」で行われたものとほぼ同じ論点に基づく），その過程でつぎのような 1 節が現われる[1]．

(3) つぎのように付け加えてもよいでしょう．ひろく数学とメタ数学について，とりわけ超限推論について私が抱いている客観主

1) ゲーデルのスコーレムに対するこのような評価は，実はあたっていないのではないかと主張する注目すべき論考として [出口 2007] がある．一読されたい．

義的とらえ方 (objectivistic conception) は，私の論理学における他の仕事にとっても基礎をなすものでした．[Gödel V, p.398]

この段落に続けて，「他の仕事」として不完全性定理（1931 年），連続体仮説の無矛盾性（1938 年）などがとりあげられ，それが有限主義的な偏見にとらわれていたなら成し遂げられなかっただろうという趣旨のことが論じられている．

ここでゲーデルが自分の立場としている「客観主義的とらえ方」は，文脈上，有限主義的な傾きをもつ数学者たちに共有されている「数学的記号の意味としてまず考えられるものがその一例であるところの，すべての種類の抽象的あるいは無限の対象を拒否する」態度と正反対の立場として語られている [Gödel V, p.398]．このことから，ここでの「客観主義的とらえ方」はほぼ数学的プラトニズムに相当すると考えてよいだろう．だとすると，ゲーデルはかなり初期からプラトニストだったというだけでなく，その実在論的態度が彼の論理学上の重要業績に大きな役割を果たした（と自分では思っていた）ことになる．

また，[Cassou-Noguès 2005] は，プリンストン大学ファイアストーン図書館に保存されているゲーデルの手稿 (全集に収録されていない) を調べ，「ゲーデルは，はっきりした哲学的影響とは独立に，数学的対象についてのプラトニスティックなとらえ方をつねにしていたように思われる．いくつかの機会に，ゲーデルは自分のプラトニズムをウィーンでの学生時代にまで遡っている」と述べている．

1.2 「数学の基礎における現状について」(1933)

当時ウィーン大学の私講師だったゲーデルのもとに，オズワルド・ヴェブレンからプリンストン高等研究所に滞在しないかという誘いが舞い込んだのは，1932 年 11 月のことだった．ゲーデルはこの紹聘を受け，1933 年 10 月から 34 年 5 月にかけて，高等研究所に滞在し，主として不完全性定理につ

いて講義を行った．

プリンストンでの秋学期が終わると，ゲーデルは 1933 年 12 月 29 日から 30 日までマサチューセッツ州ケンブリッジで開催されたアメリカ数学協会年次大会に出席し，招待講演を行った．「数学の基礎における現状について」と題されたその講演の原稿が『ゲーデル全集 III』に収録されている [Gödel 1933]．この講演は，ゲーデルとプラトニズムの関係を知る上で，さまざまな意味で興味深い．

講演は，数学の基礎づけという問題を二つのサブ問題に分けることから始まる．

> (4) 数学に基礎づけを与えるという問題（ここで，数学ということで私が意味しているのは，数学者が現に用いている証明方法の総体，ということですが)，この問題を二つの異なる部分に分けて考察することができるでしょう．まず最初に，これらの証明方法は最小限の公理と原始的推論規則とに切りつめられねばなりません．そして，これらの公理と推論規則はできるかぎり正確に述べられねばなりません．つぎに，第二に，これらの公理についてなんらかの意味での正当化を求めねばなりません．正当化というのはつまり，公理がお互いに合致し，また経験的事実とも合致するような結果をもたらすという事実に理論的基礎づけを与えることです．[Gödel 1933, p.45]

ゲーデルによれば，このうち第一のサブ問題は完全に満足のいく仕方で解決されている [Gödel 1933, p.45]．そこで，講演の後半部分の中心になる話題は，第二のサブ問題についての現状ということになる．

> (5) さて，われわれの問題の第二の部分に話を移しましょう．つまり，公理と推論規則に正当化を与えるという問題であります．しかし，こちらの問題に関しては，現状はきわめて満足いかないものにとどまっているといわざるをえません．われわれの形式化は，記号を使ったただのゲームとみなしているかぎりは，まった

くもってうまくいっており，まったくもって反対の余地のないものですが，その記号に意味をあてがおうとした途端，深刻な困難が生じるのです．[Gödel 1933, p.49]

ゲーデルが指摘する「困難」ないし「弱点 (weak spot)」は三つあり，それぞれ (i) 非構成的な存在の概念と排中律，(ii) 非可述的定義，(iii) 選択公理に関わっている．ここでは，これらのうち，非可述的定義に関わる論点をとりあげて解説しておこう．これは 1944 年の論文「ラッセルの数理論理学」でもくり返されることになる論点である．

(6) ⋯ こうした定義の進め方〔＝非可述的定義〕[2]は，すべての性質からなる全体がわれわれの知識や定義からどういう仕方でだか独立に存在しており，われわれの定義はこれらの前もって存在している性質たちの中からあるものを選び出す役目を果たしているにすぎないということを前提しています．こうしたことを前提すれば，非可述的定義はまったくもって正当なものになります．[Gödel 1933, p.50]

ところが，もし構成主義の立場を採用して，性質はわれわれが定義することによってはじめて生み出されると考えたなら，非可述的定義はある種の悪循環を生じることになってしまう．そこでたとえばラッセルは，「悪循環原理」によって非可述的定義を禁じ，分岐型理論を構築したのだった．しかし，

(7) こうした工夫によりたしかに悪循環を避けることはできますが，同時に充分な実数論を不可能にしてしまいます．なぜなら，実数論の基本定理の多くは本質的に非可述的定義に依存しているように思われるからです．[Gödel 1933, p.50]

以上の考察からゲーデルが導いた結論はつぎのようなものである．

(8) これまでの議論の帰結はつぎのものです．われわれの公理は，もし有意味な言明と解釈されるなら，必然的にある種のプラトニ

2) 〔 〕は引用者による．以下同．

ズムを前提することになります．しかし，プラトニズムはいかなる批判的な精神も満足させることはできませんし，公理が無矛盾であるという確信を生み出しもしないのです．[Gödel 1933, p.50]

この 1 節だけを取りだしてみると，『ゲーデル全集 III』での解説においてフィファーマンが指摘するように，これは「最も驚くべき」箇所だということになる [Gödel III, p.39]．というのも，この 1 節は，ゲーデルが 1920 年代からすでにプラトニストだったことを示すさまざまな状況証拠と矛盾するように思われるからだ．

しかし，この議論はトリレンマの構造をしていることに注意しよう．(i) 公理を意味を欠く記号列とみなし数学を記号ゲームとみなすなら，何の問題もない．(ii) 公理が実質的な内容をもつと考え，それを構成主義的に理解したなら，非述語的定義は悪循環を生むものとして禁止されることになる．そうすると，数学の大部分が失われる．(iii) 公理が実質的な内容をもつと考え，しかも非述語的定義を使い続けたいなら，プラトニズムをとらざるをえない．引用 (8) でゲーデルはたしかに，プラトニズムが批判的な精神を満足させることができないと述べているが，けっしてそれを理由にして他の選択肢を選んでいるわけではない．彼は端的に困っている．だから，現状は「きわめて満足のいかないもの」にとどまっているというのである．

この議論から読み取れるのは，つぎのことである．ゲーデルはどうやら (i) の選択肢をとるつもりはまったくない．ゲーデルにとって，数学が記号ゲームではなく実質的内容をもつものであることは譲れない論点だったといってよい．そしてこの態度は，その後も一貫して保たれる．もう一つは，非構成的な存在証明，排中律，非可述的定義，選択公理などの強力な方法を使い続けて古典数学を維持したかったら，人はプラトニストになる他はないという認識がみられることだ．しかし，プラトニズムは十分に正当化された立場ではない．このようにして，数学的プラトニズムの正当化を目指したゲーデルの試行錯誤が始まる．

第2章
経験科学と数学のアナロジー

2.1 「ラッセルの数理論理学」(1944)

ゲーデルは1940年にアメリカに移住する．3月4日にサンフランシスコに到着し，5月にはプリンストンに落ち着いている．プリンストンでゲーデルがまず熱中したのは連続体仮説の独立性を証明することだった．1942年の夏に重要な部分的成果を得たものの，その後の進展はあまりはかばかしくなく，結局はこの問題は放棄されることになる．その代わりにゲーデルがのめり込んだのが哲学だったのである．

1942年11月18日に，ゲーデルはシルプから『生ける哲学者たち』シリーズ (*The Library of Living Philosophers*) のラッセルの巻に寄稿するように依頼を受けた．これは現存する大物哲学者の仕事について，さまざまな角度からの批判的論文を集め，その哲学者が論文執筆者に応答するという形式のシリーズである．それまでに，デューイ，サンタヤナ，ホワイトヘッド，G. E. ムーアの巻が出版されていた．ゲーデルは，1943年5月17日に第1稿を送ったが，最終稿は遅れ，ラッセルがゲーデルの論文に回答を執筆する時間がとれそうになくなってしまった．最終稿は1943年9月28日にラッセルに回答の執筆を懇願する手紙とともに送られたが，結局は間に合わなかった．ラッセルは，他の論文への回答を書き上げた後にゲーデルの論文が到着した

ため十分な時間がとれないこと，『プリンキピア・マテマティカ』（以下，『プリンキピア』）執筆から 33 年もたっており，その間に数理論理学がみせた展開をフォローして修正をするのは困難であることなどを記した，「注 (note)」と題された短いパラグラフを書き，これを応答の末尾につけて，ゲーデルの論文はラッセルの巻に掲載された．ゲーデルが公刊した初めての哲学的論文である．

この論文はラッセルの『プリンキピア』へのコメントであり，ゲーデル自身の哲学を展開したものではない．しかし，その論述の大部分は，当初は数学と論理学に対して実在論的態度をとっていたラッセルが，次第にその実在論的態度を弱めていくことを明らかにし，その傾向を批判することに当てられている．したがって，われわれはラッセルへの批判を通じて，ゲーデル自身の見解をうかがい知ることができる[1)]．

『プリンキピア』でラッセルは，集合を不完全記号として消去する「無クラス理論 (no-class theory)」と，非可述的定義を禁止しオーダーの階層，つまり分岐型を生み出す悪循環原理とを採用している．これらがゲーデルの批判の標的になる．

ゲーデルは，ラッセルの著作にはつぎの 3 種類の異なった悪循環原理がみられると指摘する [Gödel 1944, p.127, 邦訳 p.67]．

(a) 或る集まりが全体をもつと仮定するとその全体によってしか定義できない (definable only in terms of) ような要素を含むことになってしまう場合，その集まりは全体をもたない．

(b) 或る集まりのすべての成員を含む (involving) ものは，何であれ，その集まりの一員であってはならない．

(c) 或る集合が，その集合が全体をもつと考えるとその全体を前提する (presupposing) 要素が含まれてしまうようなものであれば，そのような集合は全体をもたない．

おそらくラッセル自身は三つの悪循環原理を厳密には区別していなかったの

1) ラッセルの数学の哲学の解説としては [戸田山 2007b] を参照．

だろう．しかし，ゲーデルによると，三つの悪循環原理のうち，(a) だけは他とずいぶん異なる．

> (9) しかし，とりわけ興味深いのは第一の形である．というのも，この形の原理だけが非可述的定義を不可能にし，それによりデデキントやフレーゲによって遂行された論理からの数学の導出，ならびに現代数学それ自体のかなりの部分を破壊するものだからである．[Gödel 1944, p.127, 邦訳 p.67]

ゲーデルはまさにこの第一のヴァージョンの悪循環原理を批判する．この悪循環原理を採用すると，非可述的定義ができなくなり古典数学が営めなくなる．『プリンキピア』だって還元公理を導入することによって古典数学を組み立てることができているから，実質上，第一の形での悪循環原理を満たしてはいない．このように述べた後で，ゲーデルはつぎのように続ける．

> (10) 私は，以上を古典数学が間違っていることよりは悪循環原理が間違っていることの証拠だと考えたい．実際，悪循環原理が間違っているということは，それだけとってみてもかなりありそうなことに思われる．[Gödel 1944, p.127, 邦訳 p.67]

> (11) 第一の形式の悪循環原理が当てはまるのは，そこに含まれる存在者がわれわれによって構成されたものであるときに限るように思われる．この場合は，明らかに，これから定義する対象が属している全体を引き合いに出さずに行われるような定義（すなわち，構成の記述）が存在しなければならなくなる．これから構成されるはずのものそれ自体が属する全体に基づいて，ものの構成を行うことは確かにできない相談だからである．しかしながら，われわれの構成とは独立に存在する対象が問題になる場合には，それを含む当の全体に言及することによってのみ記述しうる（つまり一意的に特徴づけることができる）メンバーを含む全体が存在したとしても，少しもばかげたところはない．… というわけで第一の形の悪循環原理は，論理学と数学の対象，特に命題，ク

> ラス，観念などに対して構成主義的な（あるいは唯名論的な）立場をとったときにのみ当てはまるように思われる．[Gödel 1944, pp.127–128, 邦訳 p.68]

この議論の実質は，1933年に論じられたトリレンマの (ii) と同じである．しかし，ここでの大きな違いは，ゲーデルが明らかにトリレンマの (i) と (ii) を捨てて (iii) にコミットしようとしていることだ．ということは，ゲーデルは，古典数学は実在論的な立場をとったときだけ実行可能になる，という1933年段階ですでに主張されていたプラトニズムの利点とは独立に，プラトニズムを信じるべき何らかの正当化根拠を手に入れていたことになる．それは何だろうか．先の引用に続く段落はつぎのように始まる．

> (12) しかしながら，クラスと概念を実在の対象として，つまりクラスを「多数のものの集まり」あるいは多数のものからなる構造として，そして概念をわれわれの定義や構成とは独立に存在するものの性質または関係として把えることだってできるのである．／このような対象を仮定することは，私には物体の仮定とまったく同様に正当であり，その存在を信じるまったく同等の根拠があるように思われる．これらの対象は，物体がわれわれの感覚知覚 (sense perception) について満足のいく理論を立てるために必要だというのと同じ意味で，満足すべき数学の体系を手に入れるために必要なのである．そしてこのいずれの場合でも，こうした存在者について主張したい命題を，「与えられたもの (data)」についての命題として解釈すること，つまり物体の場合で言えば実際に生じている感覚知覚についての命題として解釈することはできない．[Gödel 1944, p.128, 邦訳 pp.68–69]

1944年以来，ゲーデルが一貫して用いたプラトニズム擁護のための議論は，数学と経験科学のアナロジーに基づくものだった．1964年にも，ゲーデルは数学的直観の対象の客観的実在という問題は「外界の客観的実在という問題の忠実なレプリカ」であると述べている [Gödel 1964, p.268, 邦訳 p.37]．しかし，このアナロジーはひどく厄介である．類比のポイントが異なる何通り

ものアナロジーが用いられるため，これまで多くの解釈者が混乱させられてきた．これらのアナロジーをどのように整理して理解すべきかの詳細については，[戸田山 2007a] をみていただくことにして，ここではまず，引用 (12) のアナロジーについて生じがちな誤解を解いておこう．

(12) では，「感覚知覚についての理論」を立てるために物体の存在を措定することが正当であるのと同じくらい，数学における与件についての理論を立てるために数学的対象の存在を措定することも正当であると主張されている．神秘主義者ゲーデルのレッテルからすると意外なことに，ゲーデルは数学的対象の実在性を独断的に主張したことはおそらく一度もなく，つねに，物的対象の実在性を認めるのだったら，同じ根拠で同程度に，数学的対象の実在性を認めることも合理的である，という主張を行うにとどめている．こうした主張は，チハラによって「同程度に根拠があるという主張 (equi-supportive claim)」と名づけられている [Chihara 1982].

ところで，「感覚知覚についての理論を立てるために物体の存在を措定する」というのは具体的には何をすることだろうか．一つの可能性は，われわれがしかじかの感覚知覚をもつという現象を説明するための理論（神経生理学理論ないし認知心理学理論）を立てるために，その知覚の原因として物体の存在を措定する，と理解することだろう．このように考えて数学の場合に当てはめると，われわれがしかじかの数学的知覚（数学的直観？）をもつという現象を説明するための理論を立てるために，その数学的知覚の原因として数学的対象の存在を措定する，このことは正当であるとゲーデルは主張している．こういう理解になる．

しかし，このように理解された場合，ゲーデルの主張は端的に間違いである．数学的対象の存在を措定しても，それは物理的世界に存在するものではないので，数学的直観という物理的世界（つまり，われわれの脳）に生じる現象の原因になることはできないからだ．こうした誤解のルーツは，感覚知覚と数学的知覚，つまり数学的直観とをなぞらえることにある．しかし，「数学的直観」という言葉はこの箇所には出てこない．感覚知覚と対応づけられているのは「与えられたもの」である．

そこで，つぎのように考えてみよう．感覚知覚には雑多な内容が与えられ

る（感覚に与えられたもの＝感覚与件）．これらにみられる規則正しさをまとめあげ説明するために，物体の存在を仮定する．ここで仮定された物体についての言明を付け加えると，それまでには出てこなかったような感覚知覚内容についての予言や説明が得られる．その意味で，付加された物体についての言明は，もとの感覚知覚についての言明を超えた内容をもち，したがって感覚知覚言明に還元されてしまうことはない．ここでは，すでに与えられている（真なる）命題の体系が前提される．そこに現れる命題はより基礎的なものから導かれるようなものではない．この体系をそれに含まれていなかった新しい，しかも旧命題に還元不可能な対象を措定することによって拡大する．そのことによって，その体系の説明力，予言力などが増大するなら，新しく付け加えた対象の存在措定は正当化される．「感覚知覚」とか「与えられたもの」に特定の哲学的含意を読み込まずに，以上のようにプレーンに解釈してみよう．

そうすると，数学の場合の「与えられたもの」とは，モードゥス・ポネンスや数学的帰納法のような基本的な論理的推論形式，ないしは，3+5=8 の類の自然数同士の加法・乗法と解すこともできるだろう．ようするに，「与えられたもの」は，数学の最も基礎的な部分で，直観的・明証的に把握される「内容」と考えるのである．

たとえば，つぎのようなケースを想像してみよう．いま，すべての自然数について主張されるある予想 C があるとする．そしてさらに，この予想の個々の事例は，それぞれ具体的な自然数についての単純な等式になるので，簡単な計算によりどれも直観的・明証的に確かめることができるとする．そしてこれまでのところ予想 C を反証する事例はえられていないとする．これらの個々の事例が，ここでいう「与えられたもの」である．さてここで，予想 C が証明されたと考えてみる．このことにより，これらの「与えられたもの」はまとめあげられ，これまでに試されたことのない他の自然数の組み合わせについても C の個別事例が成り立つことの予想もできるようになる．ところが，C の証明には算術を超えた集合論の公理が用いられたとする．こうした公理と，集合という対象の存在措定は，物理における理論的法則と理論的対象の措定が感覚知覚により確かめられるデータのまとめあげや予言・説明を

可能にするのと同様に，単純な算術計算によって確かめられるデータのまとめあげや予言・説明を可能にする．この意味において，その集合論の公理や集合の存在措定は正当化される．

これはあくまでも，(12) の一つの読みの可能性でしかない．しかし重要なことは，よく行われているように (12) を数や集合のような対象を神秘的な「数学的感覚」の対象として立てることを主張しているのだ，と読む必要も根拠も実はないということである．ここでゲーデルは，理論的対象の存在措定やそれについての公理は，それがわれわれがじかに白黒をつけることのできる基礎的領域に対してもつ帰結によって正当化しうる，ということを述べているにすぎない．そして，こうした「帰結の実り豊かさ」による公理や理論的対象の正当化は，ゲーデルの基本的な方法論だったのである．つぎにこのことを確認するために，1947 年の論文に目を転じよう．

2.2 「カントルの連続体問題とは何か」(1947)

1945 年 11 月 30 日と 1946 年 1 月 31 日に，『アメリカ数学月報 (*American Mathematical Monthly*)』の編集者をつとめるレスター・R・フォードから，ゲーデルに原稿の依頼があった．この雑誌には，「とは何か？ (What Is？)」という連載シリーズがあった．これは，誰にでも読めるように高等数学の小さな問題について解説する，という趣旨の特集である．軽い読み物を意図したシリーズなので，フォードもゲーデルからすぐに原稿がもらえると思っていたらしいが，これはゲーデルが「ものすごくしつこくて細部にやかましい (the most doggedly fastidious)」[2)]極度の完璧主義者であることを知らなかったフォードの誤算だった．何度も催促の手紙と返事のやりとりがあったあと，1947 年 5 月 29 日になってようやく原稿が送られた．このときすでに編集者は新任のニューサムに交代していた（さらに，タイプ原稿が提出されたのは同年の 8 月だった）．

2) ゲーデルに対するファン・ハイエノールトの評言．[Dawson 1997, p.217, 邦訳 p.294] 参照．

この論文は，連続体問題とは何かを解説し，その解決に向けてこれまでに得られた結果をサーヴェイしたのち，連続体問題の解決はどのような方針に基づいて取り組まれるべきかを提案する，という三つの目的をもっている．

まず，ゲーデルは，連続体問題とは何かを解説し（第1節），それまでの時点で得られているいくつかの結果に触れ（第2節）たのち，第3節でつぎのように述べる．

> (13) この分野で得られている結果が，最も基礎的な問いに関してでさえこのようにきわめてわずかなのは，ある程度までは純粋に数学的な困難のためかもしれない．しかし，その背後にはもっと根の深い理由も隠されており，これらの問題の完全な解決を得ることができるのは，その問題に現れてくる語（たとえば「集合」「一対一対応」など）と，こうした語の用法の根底にある公理とについて，その意味を（数学でこれまで通例であった以上に）いっそう深く分析することによってのみである，と思われる．[Gödel 1947, p.179]

ここでいう「根の深い理由」は，連続体仮説がおそらく集合論の既存の公理系から独立だろうということである．連続体仮説が反証不可能であることは，すでにゲーデル自身の無矛盾性証明によって1938年の段階で示されていた．証明不可能性（独立性）の証明は，この時点ではまだ誰によっても行われていない（1963年にコーエンによって証明された）．しかし，この論文を執筆した1947年の段階ではすでに，ゲーデルはおそらく連続体仮説は既存の公理系からは決定不能だろうと推測し，決定不能性の証明を追求するのが最も有望な研究戦略だと考えていた．

> (14) ··· カントルの予想にはアプリオリに三つの可能性がある．つまり，この予想は証明可能であるか，あるいは反証可能であるか，あるいは決定不能であるかのいずれかである．このうち，三番目が最もありそうだ（実際この三番目の選択肢は，上述の予想，つまり，連続体問題の難しさはおそらく純粋に数学的なものではないだろうという予想を，厳密に言い直したものにすぎな

> い）．今のところ，この決定不能性の証明を探し出すことが，連続体問題に対する挑戦の仕方としておそらく最も有望なものである．[Gödel 1947, p.181]

ゲーデルが考えようとするのは，この先である．つまり，連続体仮説が独立であることが分かったあと，何をどのようにすべきかということだ．連続体仮説が独立だとしよう．そのとき，連続体仮説の真偽は，既存の公理系からは決めることができない．そのとき，ZF ＋連続体仮説という公理系と，ZF ＋連続体仮説の否定，という公理系のどちらが正当であるかを問うことには意味はない，とする立場もありうるだろう．数学を内容を欠く記号ゲームだと考える者はこの立場を選択することになりそうだ．連続体仮説が成り立つ公理系も成り立たない公理系もあるのであって，連続体仮説は真か偽かと問うことには意味はない．われわれの関心や必要性に応じてその都度どちらかの公理系を採用してやっていけばよい．

これに対してゲーデルが主張するのは，連続体仮説の独立性はその真偽を問うことを無意味にしないということである．

> (15) しかしここで，つぎの点を銘記しておかねばならない．すなわち，仮にその証明不可能性を示すことに成功したとしても，このことは（たとえば π の超越性の証明のような場合と対照的に）けっして問題の決定的な解決とはならないだろう，ということである．(直観主義者のように）古典的な集合論の概念と公理がそもそも意味をもっていること（あるいは確定的な意味をもっていること）を否定する者だけが，こうした解決に満足できるだろう．しかし，これらの概念と公理が何らかの充分に確定された実在 (well-determined reality) を記述していると信じる者にとってはそうではない．というのは，この実在において，カントルの予想は真か偽かのいずれかでなければならず，今日知られている限りでの公理からそれが決定不能であるということは，ただ単に，これらの公理がこうした実在の完全な記述を含んでいないということを意味するにすぎないからである．こうした信念はけっして

荒唐無稽なものではない．というのは，たとえある問いが現行の形の諸公理からは決定不能であったとしても，その問いの決定が得られるようになる場合がある，ということを指摘できるからである．[Gödel 1947, p.181]

ここで，数学に対してプラトニズムの立場に立つことと，連続体仮説の真偽を決定するための探求の継続とが結びつけられる．独立性の証明がなされたとしても，それはプラトニストにとっては問題の最終的解決ではない．公理系の構成から独立した客観的な何かとして，集合論的宇宙という確定した実在があると考えるならば，連続体仮説はその実在において真か偽のいずれかに決まっているはずだ．このとき，ある公理系から連続体仮説が決定できないということは，その公理系が連続体仮説の真偽に決着をつけることができるほどには実在のありさまを精密に記述できていないということを示すにすぎない．こうして，プラトニズムは，既存の公理系からは決定不能だが有意味に思われる問題について，探求を継続する余地と動機づけを与える．

われわれと独立に確定した集合論宇宙としてゲーデルが念頭に置いていたものは，今日「反復的集合観 (the iterative conception of set)」と呼ばれるようになった集合の世界である．ゲーデルは，概念の外延，つまりありとあらゆるものを，特定の属性をもつものともたないものという二つのカテゴリーに分割して得られるものを集合とみなすのではなく，きちんと定義された対象に対して「$\cdots$ の集合 (set of $\cdots$)」という操作を反復的に適用することによって得られるもののすべてとして集合論的宇宙をとらえることを提案する．こうして生み出される集合の全体像をわれわれは簡単に見通すことはできないが，それは確定した実在をなしているはずだとゲーデルは考えている．

(16) このような集合のとらえ方は，およそいかなる逆理 (antinomy) にも導いたことがない．つまり，これまでのところ，こうした集合のとらえ方に基づいてまったく「素朴」に無批判的に作業を進めても，完全に無矛盾であることが示されているのである．[Gödel 1947, p.180]

さて，連続体問題は独立性が証明されたとしても無意味にはならない，と

いうことが分かったとしても，どのようにして連続体仮説の真偽に答えを出せばよいかは別問題である．しかし，その戦略はもはや明らかだろう．連続体仮説の決定不能性が，現行の公理系の実在記述の不十分さから生じているのだとするならば，それが決定できるような新しい公理をみつけ出してやればよい．

> (17) したがって，つぎのように考える十分な根拠がある．すなわち，連続体仮説の集合論における役割は，それがカントルの予想〔=連続体仮説は真であるという予想〕の反証を可能にする新公理の発見へとつながることに存するだろう，ということである．[Gödel 1947, p.186]

ゲーデルは，連続体問題の解決のために探求されるべき新公理は，「「…の集合」という操作のいっそう先までの反復的適用が存在することを主張するもの」，つまり「非常に大きな基数の存在を主張する」ような種類の公理，たとえば到達不可能基数や可測基数の存在を主張する命題と同様の強い無限公理だろうと予想している[3]．そうするとつぎの問題は，連続体仮説を決定してくれるような新しい公理をどのようにみつけ出して，(そしてここが重要だが) どのようにしてそれが真であると正当化すればよいのか，というものになる．ここでゲーデルは，数学と経験科学とのアナロジーをさらに方法論レベルにまで拡張する．

> (18) しかしながら，新公理がそれじたい必然的であるかどうかにかかわらず，さらには，それが自分ではまったく必然性をもたないような場合ですら，その公理が真かどうかを決定することは別の仕方でも可能である．つまり，その公理の「成功」を調べることにより帰納的に決定するのである．ここでの成功とは，帰結の面での実り豊かさということであり，とりわけ，次のような意味での「検証可能」な帰結が豊富に得られることを意味する．すなわち，新しい公理なしでも証明できる諸帰結のうちに，新公理の助けを

3) くわしくは，本書所収の松原論文を参照．

借りた方がずっと簡単に証明でき，証明自体ははるかに発見しやすくなり，さらには，多くの別証明をひとつの証明へと簡略化できるようになるものがあるということである.（中略）だがさらに，これよりもいっそう程度の高い検証というものを考えることができる．つまり，その検証可能な帰結が非常に豊富で，分野全体に大きな光をもたらし，大変に強力な問題解決の方法を与えてくれるので，たとえそれだけとってきたときに必然的なものであろうとなかろうと，受け入れることができる——少なくとも，任意の十分に確立された物理的理論を受け入れることができるのと同じ意味で，受け入れることができる——というような，そうした公理が存在するかもしれないのである．[Gödel 1947, pp.182–183]

経験科学では，理論的仮説がそこから導かれる検証可能な帰結によって帰納的に正当化される．数学においても同様に，帰結をみることで新公理を帰納的・蓋然的に真としたらよいのではないか，という提案である．経験科学で新しい理論的仮説や理論的対象の存在が措定される場合を考えてみる．マクロ物理学に，ミクロな対象（分子など）についての仮説を付け加えると，たとえばブラウン運動の説明のように，マクロ物理学の領域に，それまでのマクロ物理学だけからは演繹できなかった新奇な帰結がもたらされる．このことが逆に，そのミクロ物理的仮説の信憑性を高めるのである．これと同じように，新公理は旧公理の帰結を超えた帰結をもつと考えられているらしい．つまり，引用 (18) の後半では，単に旧公理系での証明を簡略化するための道具ではなく，新公理が旧公理系からは得られない真に新しい帰結をもつことによって，「光をもたらし」たり，われわれの問題解決能力を高めたりする，という場合が念頭に置かれている．こうした場合，新公理はそれじたいは必然的に思えなくても，帰結により帰納的に支持される．

このように，ゲーデルの方法論は帰納的方法やアブダクションを数学でも認めようというものであり，経験主義的な方法に接近している．こうした方法論的立場は [Gödel 1944] ですでに表明されていた．このことが興味深いのは，数学的公理は確実な真理でなければならないと考えてきた哲学的伝統か

らは大きく離れた地点にゲーデルはいる，ということになるからだ．

> (19) もちろん，こうした状況のもとでは，数学はその「絶対的確実性」の多くの部分を失うかもしれない．[Gödel 1944, p.121, 邦訳 p.60]

プラトニズムの立場を採用することによって，連続体問題が有意味になると同時に，その解決の方向性について一定の見通しが得られる．その意味で，プラトニズムは数学の実践を外部から眺めた哲学的解釈ではなく，数学内部の作業仮説として探求を進める駆動力になる．とはいえ，以上の議論は，プラトニズムをとることの帰結を展開したものであって，プラトニズムの正当化根拠を与えたものにはなっていない．引用 (15) で，集合論の概念と公理が確定された実在を記述していると「信じる者」にとっては，独立性の証明が最終決着にはならない，というもって回った言い方をしているのは，おそらく自分はまだプラトニズムの立場を十分に正当化できていないという自覚があるためだろう．しかし，この論文でのゲーデルの議論は，プラトニズムを連続体問題をどう解くかという具体的な問題に適用して，その実り豊かさを示すことによって，プラトニズムを間接的・蓋然的に擁護する議論にはなっているだろう．

第3章
不完全性定理とプラトニズム

3.1 ギブス講義「数学基礎論におけるいくつかの基本的定理とその帰結」(1951)

1951 年はゲーデルにとって，よいことと悪いことがいっぺんにおしよせた年だった．まず 2 月に彼は死にかけた．十二指腸潰瘍による出血で数日の間生死の境をさまよったのである．一方で，ゲーデルは数々の名誉もさずかることになった．3 月には数理物理学者のジュリアン・シュウィンガーとともに第 1 回アインシュタイン賞を授賞した．そしてその 3 か月後，イエール大学はゲーデルに名誉文学博士号を与えた．この波乱に豊んだ年のしめくくりとなったのが，ギブス講義である．

1951 年 12 月 26 日，ゲーデルはアメリカ数学会の年次大会に出席し，第 25 回のギブス講義を行った．この講義は，統計力学の大物ギブスを記念して創設されたものである．この講演原稿はアメリカ数学会の学会誌『アメリカ数学会紀要 (*Bulletin of the American Mathematical Society*)』に投稿するつもりで，講義後も 2 年間にわたって推敲されたが，結局は提出されず，死後，遺稿の中から発見され，『ゲーデル全集 III』に収録された．原稿はかなりの書き直しをされているので，どの程度実際の講義内容をとどめているのかは分からなくなってしまっている．

この講義は二つの点で注目に値する．まず，最も体系的かつ明確にゲーデ

ルの実在論／プラトニズムが主張され，擁護のための議論が試みられている点．そしてもう一つは，論理実証主義的数学観を退けプラトニズムの立場を主張するにあたって，ゲーデル自身が証明した不完全性定理が非常に重要な役割を果たしている点である．

この講演は二つの部分からなる．まず前半では，数学基礎論の研究においてこれまでに得られたさまざまな成果がつぎのように概括される．

> (20) 私が念頭に置いているメタ数学における成果はすべて，一つの基本的事実を取り囲んでいる，いや，一つの基本的事実のさまざまな側面にすぎないとすらいってもよいでしょう．その事実を，数学の完結不可能性 (incompletability)，あるいは無尽蔵性 (inexhaustibility) と呼ぶことができましょう．[Gödel 1951, p.305]

数学の無尽蔵性は二つの場面であらわになる．一つは集合論の公理化の完結不可能性である．ある階層までの公理を定式化することそのものが，つぎの公理の産出を促してしまうため，公理を構成する手続きには終わりがない．もう一つは，ゲーデル自身の結果，つまり第一，第二の二つの不完全性定理である．

そして，講演の後半部は不完全性定理から哲学的帰結を引き出してそれを吟味することに費やされる[1]．まず，ゲーデルは第二不完全性定理はつぎの帰結をもつと主張する．

> (21) 数学はこの意味で完結不可能です．つまりその自明な公理を有限の規則に収めることができない，言い換えれば，人間精神は（純粋数学の領域においてすら）いかなる有限の機械の能力をも無限に超えているか，あるいは，特定の型の絶対的に解決不可能なディオファントス問題が存在するか，のいずれかなのです．[Gödel 1951, p.310]

---

1) ゲーデルがどのようにその帰結を導出したかの詳細は，[飯田 2007, pp.140–148]，あるいは [高橋 1999, pp.158–172] を参照．

そして，ゲーデルはこの選言的な帰結がもつ哲学的意味をさらにつぎのように敷衍する．

> (22) 哲学的帰結もとりあえず選言的なものになります．しかし，どちらの選択肢をとったとしても，唯物論的哲学にはっきりと反するものであることには変わりありません．つまり，第一の選択肢が正しいなら，それは，人間精神の働きは脳の働きに還元することができないことを帰結するように思われます．なぜなら，脳はどうみても，有限の部品，つまりニューロンとその結合からなる有限機械だからです．(中略) 一方，絶対的に解決不可能な数学の命題があるという第二の選択肢の方は，数学はわれわれの創造物にすぎないという見解を反証するように思われます．というのも，創造物は創造者が与えた性質以外の性質をもたないでしょうから，必然的に創造者は自分の生み出したもののすべての性質を知っていることになるだろうからです．というわけで，この選択肢から帰結するように思われるのは，数学的対象と事実（あるいはそれらのうちの少なくともいくつか）はわれわれの心的活動や決定とは独立に客観的に存在しているということ，つまり数学的対象についての何らかのかたちのプラトニズムあるいは「実在論」ということになるでしょう．[Gödel 1951, pp.311–312]

というわけで，第二不完全性定理からゲーデルが導いたのは，人間の心についての反機械論かプラトニズムのどちらか（あるいは両方）が正しい，という主張である．[飯田 2007, pp.140–148] が指摘するように，ゲーデルは，数学には絶対的に解決不可能な問題は存在しないだろうという合理的楽観主義を抱いていた．そうすると絶対的に解決不可能なディオファントス問題が存在するという「第二の選択肢」は成り立たないだろうとゲーデルは内心では思っていたことになる．にもかかわらず，この講演では，第二の選択肢を含む選言的結論を引き出し，本当は信じていない「第二の選択肢」に基づいてプラトニズムを導いている．それはおそらく，講演の眼目が反機械論よりはプラトニズムの擁護にあったからだと思われる．実際，講演の後半では反機

械論の主張は影を潜め，もっぱらプラトニズムの正当化を目指したさらなる議論が展開されていく．また，講演の結論でもつぎのように述べられていることから，講演の目的はあくまでもプラトニズムの正当化にあったことは明らかだろう．

> (23) 私の印象を述べればつぎのようになります．ここで問題になっている概念を十分に明確化したのちには，以上の議論を数学的な厳密さをもって行うことができるでしょう．そして，(中略) その結果は，プラトニズムが唯一維持可能な見解であるというものになるはずです．プラトニズムということによって私が意味しているのは，数学は非感覚的な実在を記述している，そして，その実在は人間の心の作用とも傾向性とも独立に存在し，人間の心によって知覚される，それもおそらくきわめて不完全にのみ知覚されるという見解です．[Gödel 1951, pp.322–323]

そこで，ゲーデルがさらにどのようにプラトニズム擁護論を展開していくかをみてみよう．まずゲーデルは，引用 (22) に対して考えられる二つの反論をあげてそれらを斥ける．つまり，創造者が自分の生み出したものの性質すべてを知っている必要はないのではないか，人間が機械をつくるときだって，機械のすべての働きを前もって知っているわけではないからだ，という反論が一つ．もう一つは，すべての自然数についての命題の意味はその証明の存在に存すると考えれば，決定不能な命題もその否定もどちらも無意味になるから，それゆえそのいずれも客観的に存在するがわれわれには知られていない性質を表現しているような命題とみなす必要はなくなるのではないか，という反論である．

第一の反論に対するゲーデルの答えはおおむねつぎのようにまとめられる．数学だって無から創造することはできず，何らかの材料を必要とする．それらの材料からつくられる数学の一部が人間の創造であったとしても，もとになる材料は客観的なものだろうから，実在論的観点をなしですますことはできない．これはどうひいき目にみても反論に正面から答えたものとは言い難いが，最大限好意的に解釈するなら，つぎのように再構成することができる

だろう．自分がつくったものなのに機械の働きを見通すことができないということがあるとするなら，それは機械の部品や材料が，創作者にとって外的・客観的なものであって，その細部が分かっていなかったからだろう．機械と数学とのアナロジーを徹底するならば，かえってそのアナロジーは，数学的創造の材料に関しては，客観的で創造者にとって外的なものだ（それゆえこれらの材料については実在論があてはまる）とせざるをえなくなる．

第二の反論への答えは注目に値する．ゲーデルはまず，証明を理解するより前に命題の意味をまず理解しなければならないのだから，「すべての」の意味を「証明」の意味によって定義することはできないはずだ（だから，「すべての自然数は $\cdots$」という形の命題の意味は，文字通り無限にたくさんある自然数の一つ一つが，しかじかの性質をもつという意味に解するべきだ）としたうえで，すべての自然数についての絶対的に決定不能な命題の真偽を探る方法として，経験科学と類比的な帰納的方法を提案する．

> (24) このような帰納的推論に発見法以上の意味を認めることに，あらゆる数学者のみなさんが生来の嫌悪感を抱いておられることを私は認めます．しかしながら，これは，数学的対象が意味はどうあれ本物の存在ではないという偏見のせいではないでしょうか．もし数学が，まさに物理学と同じように客観的世界を記述しているのだとしたなら，物理学の場合と同じように数学においても帰納的方法を用いてはならない理由はないはずです．[Gödel 1951, p.313]

ゲーデルの自然科学と数学のアナロジーは，このようにして方法論にまで拡張され，数学における経験的方法の使用を認める立場に近づいていることに注意しよう．この立場をとりあえず数学的経験論と呼んでおこう．

さて，すでに指摘したように，楽観的合理主義者であるゲーデルは，おそらく絶対的に決定不能な数学的問題はないだろうと考えている．だとすると，プラトニズムを擁護する独立の議論があった方が望ましいだろう．

> (25) しかしながら，そしてこれこそが私が今回議論したいことがらなのですが，選択肢のうちどちらが正しいのかということと

は無関係に，第二の選択肢から引き出される哲学的帰結，とりわけ概念的実在論（プラトニズム）は，数学基礎論の近年の発展によって支持されるように思われます．[Gödel 1951, pp.313–314]

というわけでゲーデルは，実在論を擁護し，数学がわれわれの自由な創造物であるという見解を批判するための三つの議論を補足している．

(1) 数学が人間の自由な創造物であるとするならば，自分が創造した対象についての無知は，かりに生じたとしても，自分が何を創造したのかについての明晰な理解を欠くときにだけ生じるものであるはずだから，完全な明晰さに達すれば消えてなくなるはずだ．しかし，数学基礎論の発展によってわれわれはこの上ない正確さと明晰さに達したはずなのに，それは数学的問題の解決に対してはほとんど何の助けにもならなかった．[Gödel 1951, p.314]

(2) 数学者は創造者であれば享受できるはずの自由をほとんどもたない．公理を自由に創造したとしても，そこから出てくる定理についてはまったく思い通りにはならない．[Gödel 1951, p.314]

(3) たとえば，自然数と自然数の集合は異なった創造物であり，前者を創造したからといって，後者を創造しなければならなくなるわけではない．ところが，自然数のある性質を証明するために自然数の集合の概念が必要になることがある．自然数にどのような性質を与えて創造したのかを知るために，別の対象を創造しなければならないことになる．これは奇妙である．[Gödel 1951, p.314]

さて，ここまでは数学を「自由な創造」ととらえる立場をどれとは特定せず漠然と批判してきた．つぎにゲーデルは，こうした立場のうち，最も明確で哲学的にラディカルな立場である規約主義の批判へと駒を進める．ゲーデル自身の言い方によれば，規約主義とは「数学的命題を構文論的（ないし言語的）規約の一面を表すものにすぎない，つまり，数学的命題はこれらの規約の一部をくり返すものにすぎないと解釈する立場」[Gödel 1951, pp.315–316]である．規約主義者としては，ウィーン時代に交流のあった論理実証主義者ハーンとカルナップの名前があげられている．

規約主義にもさまざまなヴァリエーションがあるが，その中で最も単純な

見解は，数学的命題は用語の定義のみによって真であるという主張だ．つまり，数学的定理はそこに現れるすべての語を，それらの語の明示的定義に従って順次書き換えていくことによって，最終的には同一律「a=a」のような恒真命題に還元される．定理は「a=a」のもって回った言い方にすぎず，世界がどうであるかについて何も述べていない．数学的命題は，規約的定義によって真なのであって，世界のありさまによって真なのではない．

しかし，ゲーデルによれば，すべての数学をこのような恒真命題へ還元することは不可能である．このことも不完全性定理からの帰結として主張できる．そのような還元手続きがあったとすると，それはすべての数学的命題の真偽の決定手続きとして利用できてしまう．しかし，不完全性定理が示していたのは，自然数論に対してすら，そのような手続きは存在しない，ということだった．

ゲーデルが規約主義を批判するのは，規約主義は数学的命題が実的内容 (real content) をもつことを否定し，それゆえ数学的事実なるものはない，とするからである．数学的事実を表現していると思われている命題は，実は何も表現しておらず，それが真なのは単に規約によるにすぎない，ということになればたしかにプラトニストにとっては都合が悪い．ただし，興味深いことに，規約主義はこれとは別のある点については，プラトニズムと共同歩調をとっているのである．

> (26) しかし，数学的真理についてのこの間違った理論は，一つの点では完全に正しく，実際に数学の真の本性を明らかにしてくれているように思われます．つまり，数学的命題は，そこに現れる語の意味によって実在物の世界がどうあれすでに真なので，時空内に存在する物理的ないし心的実在については何も語らない，ということは正しいのです．けれども，間違っているところがあって，それは，その語の意味（つまりその語が表示する概念）は，人間がつくったものであり，意味論的な規約にすぎないと主張する点です．本当は，こうした概念は，それだけで客観的な実在をなしており，それをわれわれがつくったり変えたりすることはで

きず，ただ知覚し記述することができるだけなのだと私は思います．[Gödel 1951, p.320]

さて，明示的定義による還元に訴えた規約主義は，規約主義の最も単純な類型の一つにすぎない．一般に，数学的命題の真理性が構文論的規則（命題の形だけに言及した規則）のみによって決まるような体系であれば規約主義的といってよいだろう．定義的還元はそれを実現する一つの方法にすぎないから，規約主義にはもう少し洗練されたヴァージョンがいろいろ考えられる．ゲーデルはこうしたヴァージョンにも当てはまるような批判を試みている．しかし，その出来についてはどうも満足いかなかったようだ．ゲーデルの原稿には，その批判が展開されている箇所（およそ6頁分）について，「ここから29頁まで省略」という書き込みがある．おそらく，講義での口頭発表からは削除されたのではないかと推測されている [Gödel 1951, p.315, note c].

ギブス講義で規約主義を批判したのは，数学は実的内容をもつという論点を強調することが目的だった．これは1933年の講演で明らかにされて以来，ゲーデルの一貫した主張だった．そして，この規約主義批判を論文の主題に掲げて全面的に展開しようとしたのが，「数学は言語の統語論か？」と題された一連の草稿である．つぎにこの草稿におけるゲーデルの議論をとりあげて検討することにしよう．

3.2 「数学は言語の統語論か？」

ギブス講義以降，ゲーデルは数学関係の学会，講演などにほとんど顔を出さなくなった．彼はますます哲学研究に没頭するようになっていった．

そんな折，1953年5月15日に，ゲーデルはシルプから再び『生ける哲学者たち』シリーズ（今回はカルナップの巻）への寄稿を依頼された（シルプから提示された仮タイトルは「カルナップと数学の存在論」）[2]．6月2日に

2) まったくの偶然だが，1952年秋から1954年春まで，カルナップは高等研究所に滞在していた．旧知の仲であるゲーデルとカルナップはおそらくこの滞在中にも意見交換をしていたはずだが，ドーソンはそれが「統語論」論文を書く直接のきっかけになったので

依頼を引き受けたのち，6 年間にわたりゲーデルは六つのヴァージョンの草稿を執筆したが，最終的に 1959 年 2 月 3 日，シルプ宛の書簡で出版をあきらめる趣旨を伝え，執筆は中断された．この間の，原稿を催促するシルプと言い訳をくり返すゲーデルの息詰まる書簡のやりとりはすべて『ゲーデル全集 V』で読むことができる（pp.238–245，しかし提出すべき原稿をため込んでいる人は心臓に悪いので読まないほうがよいかもしれない）．六つの草稿のうち，最も内容豊かな第 3 草稿と，最後に書かれたと推測される第 5 草稿が『ゲーデル全集 III』に収録されている．以下では第 3 草稿を中心に検討し，必要に応じて第 5 草稿に言及する．

この論文でのゲーデルの目的は，数学は言語の統語論だという規約主義的な論理実証主義者の考えに対して，包括的批判を行うことにあった．ゲーデルは論理実証主義者と直接のつきあいのあったウィーン時代から，彼らの哲学には批判的だったが，それを論文や講演の形で公にすることはなく，むしろ [Gödel 1944] にみるように，構成主義に対する批判のほうが目立っていた．論理実証主義者の規約主義を主題的にとりあげて批判したのは，ギブス講義とこの論文が最初で最後である．

この論文での規約主義批判は第二不完全性定理に基づいている．ゲーデルは，批判しようとする見解を「構文論的数学観」と名づけ，その見解が満たすべき制約を 6 点提示し，そのすべてを満たすような提案はこれまでになかったし，これからもありえない，だから構文論的数学観はまちがいだと論じる．

まず，ゲーデルは，冒頭の段落で構文論的数学観とは何かを述べる．

> (27) この数学観（以下では構文論的数学観と呼ぼう）によれば，数学は言語の構文論に完全に還元可能である（実際のところ，数学とは言語の構文論にほかならない）．すなわち，数学的定理の妥当性は，記号の用法についての構文論上の規約からの帰結であることにほかならず，何らかの事物領域で成り立つ事態を記述していることに由来するのではない．あるいは，カルナップの言い方によれば，数学とは，内容も対象ももたない補助的な文の体系

はないだろうと推測している [Dawson 1997, p.200, 邦訳 p.274]．

であるということになる．[Gödel 1953/9-III, §1 p.335][3)]

具体的には，『言語の論理的構文論』のカルナップ，「数学の基礎」のラムジー，ヒルベルト学派の形式主義がこうした構文論的数学観を代表する論者である[4)]．第5節で，ゲーデルはあらためて構文論的数学観を特徴づけるが，そこでは，この数学観は (a) 数学は言語の構文論にほかならない（として解釈できる），(b) 数学の文は内容をもたない，という二つの主張を柱とするものとされている．これに対し，ゲーデルがとろうとする態度はつぎのようなものである．(a) は反証できる，そして (b) については，構文論的数学観を吟味すると，数学的対象および事実は，物理的事実とまったく同じくらい客観的なものとして存在するという結論が導かれる．だから，経験科学は事物領域を記述するが数学はそうではなく数学は内容を欠く，という主張は成り立たない．

まず，ゲーデルは (a) の主張を批判する．批判の第一歩は「数学は言語の構文論として解釈できる」という主張をできるかぎり明晰化することである．このため，ゲーデルはこのテーゼに現れる言葉を厳密に解説していく．それは同時に，テーゼ (a) が成り立つために必要な要件を析出することでもある．

まず，「構文論的規約」とは何かをはっきりさせておこう．それは，ある記号を含む文の真理性（主張可能性でもよい）についての規則を述べることによって，その記号の用法を定義するための規則である．ただし，その規則は表現の外的構造のみに言及し，その意味とか表現自体以外の何かに言及してはならない．言い換えれば，ある種の文はその形だけで真であるといってよい，と認めるための規約である．この規則によって真になる文はまさに「規約による真理」といってよい．

つぎに，「数学は言語の構文論として解釈できる」とはいかなる主張なのだろうか．

(i)「数学」は全古典数学を意味する．なぜなら，構文論的数学観は，経験科学にとっての数学の有用性を損なわずに数学から内容を抜くことで

3) [Gödel 1953/9-III] の第 3 草稿は，1–3 パラグラフ程度の比較的短い節にわかれており，全部で 45 節からなる．そこで，引用に際しては，ページ数の前に節番号も付記することにする．

4) [Carnap 1937]，[Ramsey 1925] を参照．

あるから，経験科学に用いられる全数学，つまり古典数学の全体を対象とすべきだからである．

(ii)「言語」の文は有限個の記号からなる．なぜなら，無限に長い文は物理世界に存在できず，それじたい数学的対象だからである．

(iii) 構文論の規則は有限的である．つまり，表現の無限集合を量化してはダメである．

(iv) 構文論の規則は無矛盾であることが証明できなければならない．これについては多少の説明が必要だろう．文の真理性についての規則が構文論的なものである，といえるのは，その規則に従って真理とされる文が，言語外の事実（世界が現にどうなっているか）に左右されない文であるときである．つまり，その規則からは事実的な文の真偽が出てこないこと，そして出てこないことがその定式化からアプリオリに知られなければならない．もし，構文論の規則が矛盾していると，そこからはどんな命題も帰結するから，事実的な文も出てきてしまう．この条件がゲーデルの規約主義批判の核心になる．

(v) 数学は言語の構文論として「解釈」できる，とはつぎのことを意味する．(v-1) 数学の公理と証明手続きが構文論の規則から演繹できる，(v-2) 検証可能な事実についての結論で，かつては数学的定理を応用して得られ，数学的公理が直観的に真であることに基づいて認められていたようなものが，こんどは構文論的考慮のみによって正当化できる．ゲーデルによれば，要件 (v-2) からは，(iv) と同様に，構文論的規則の無矛盾性証明の必要性が帰結する．

(vi) 構文論的規則からの数学公理の導出，構文論的規則の無矛盾性証明においては，構文論的概念だけを用い，構文論的概念の使用者が拒否できないような証明手続きだけを用いなければならない．

ところで，(iv) や (v-2) の帰結で，構文論的規則が現に無矛盾であるというだけでは不十分であり，その無矛盾性が証明できなくてはならない，とされているのはなぜだろう．この点は実はよく分かりにくい．無矛盾性ではなく無矛盾性証明が必要なのはなぜかを考えるヒントはつぎの節にある．

(28) 記号を操作するための規則を機械的に適用することによって，数学的直観を用いて得られるのと同一の文に到達するという点は，もちろん，疑いなく正しい．しかしながら，それに加えて数学的直観は，これらの文が観察可能な事実を表し，検証された物理法則に数学を適用することによって得られたものであるならば（あるいは，それらの文は確認可能な数学的事実を表すものであるならば），それらの事実は観察（もしくは計算）によって明らかにされるはずだという確信をも生み出す．したがって，構文論が数学的直観の代理として受け入れられるためには，それにもこうした期待をもってよいだけの十分な理由がなければならず，そのためには無矛盾性証明が必要なのである．たしかに，構文論的数学観の擁護者は，数学的直観を知識の源泉としては認めない．それゆえ，彼らが根拠あると認めるかぎりの数学を構文論で解釈する，あるいは，それで置き換えることは難しくない．しかしながら，構文論的解釈の本来の目的とその主要な関心は，構文論的解釈が（とりわけ数学の応用において）数学的直観の正しさを信ずることの代わりとなりうるかという問題にかかわっている．[Gödel 1953/9-III, §16 pp.340–341]

ゲーデルは，構文論的数学観を，数学的直観が果たしている役割を構文論的規則によって肩代わりさせようとする考え方とみなしている．物理法則に数学的直観を適用してある文が導かれたとしよう．このときわれわれは，この文が観察によって検証されると確信できる．一方，その物理法則に構文論的規則を機械的に適用して同じ文が導かれたとする．しかし，これだけではこの文が観察によって検証されると信じることはできない．なぜなら，もし適用した構文論的規則が矛盾していたなら，どんな文も出てきてしまうので，ここで出てきた文が検証され真となるような文だとはかぎらないからである．そして，かりに，構文論的規則がわれわれのあずかり知らぬところで無矛盾で，たまたま事実として正しい文が出てきていたのだとしても，それだけでは，ここで導出された文が検証されると信じる根拠にはならない．われわれ

は規則が無矛盾であったことを知っていなければならないのである．

以上の六つの要件を満たすような仕方で数学を統語論として解釈できるならば，規約主義は支持され，数学的直観を用いることなく数学を基礎づけることができるだろう．しかし，カルナップ，ラムジー，ヒルベルトらによってこれまでに提出されてきた統語論的数学観はいずれもこれらの要件をすべて満たすことができない．カルナップは，非有限的な統語論的規則を使っているし，ラムジーは無限に長い命題を認めている．また，形式主義は (ii) から (iv) までの要件を満たすかもしれないが，そうすると (i) は満たせない．数学のごく一部に統語論的解釈を与えることができるにすぎないからだ．

この観察から，ゲーデルはさらに一歩進んで，こうした否定的結果はこれまでになされた特定の提案についてだけでなく，統語論的数学観のどんな試みにも当てはまるだろうか，と問う．この問いに対する答えは，「有限的な組み合わせ論的推論 (finitary combinatorial reasoning)」によってどのような範囲を指すのかに応じて異なる．しかし，こうした推論として古典的自然数論の形式体系の中で表現可能なものを考えているかぎりは（そしておそらくこの考えは妥当である)，答えはイエスとなる．

> (29) しかしながら，ある一般的定理により，原始帰納算術を含む体系についての無矛盾性証明はこの体系内ではけっして表現できないから，古典的自然数論でさえ，ゆえに，それよりも広い体系はもちろんのこと，有限的推論によって無矛盾であると証明することはできない．[Gödel 1953/9-III, §24 p.343]

もちろん，ここでいう「ある一般的定理」とは第二不完全性定理のことである．これによって，構文論的規則の体系が無矛盾であることを有限的推論によって証明することはできず，要件 (iv)(v)(vi) を同時に満たすことはできない．こうしてゲーデルはつぎのように結論する．

> (30) それゆえ，構文論的プログラムの実行にあたっては，要件 (i)–(vi) を同時に満たすことはできない．(中略) すなわち，数学において用いられる抽象的な超限的概念についての公理を，記

号の組み合わせと，それらの性質および関係に関する有限的考慮によって置き換えることはできない．[Gödel 1953/9-III, §25 p.344]

論文の後半で，ゲーデルは構文論的数学観の第二の柱である，(b) 数学の文は内容をもたないというテーゼに対する批判を行っている．ゲーデルはこのテーゼを，つぎの二つからなるものとする．

(b-1) 数学の命題は経験的内容をもたない．

(b-2) 内容とは経験的内容のことである．

すでにみたように，ゲーデルは数学的命題の内容が経験的内容ではないという点については，論理実証主義者に同意しており，またそれを評価していた．そこで，ゲーデルが攻撃するのは (b-2) になる．

> (31) 数学的事実は存在しないという結論に導く議論は論点先取 (*petitio principii*) でしかない．つまり，初めから「事実」が「経験的事実」，すなわち「感覚に関わる総合的事実」と同一視されていることが示しうる．この意味で，数学が内容をもたないことは認めてもよい．しかし，それはもはや，第 1 節で述べられたような哲学的問いとはまったく関係をもたない．なぜならば，数学がこの種の内容をもたないことは，プラトニストもまた同意するからである．というのは，プラトニズムによれば，数学の内容とは，われわれの感覚とは独立に存在する，概念やその他の抽象的対象間の関係からなるものである．ただし，そうした関係は，特別な種類の経験によって知覚され，また，普遍的に受け入れられている自然法則と合わせられるならば，感覚的知覚によって検証可能な帰結をもちさえする．[Gödel 1953/9-III, §37 p.351]

内容はあるとしたら経験的内容でしかありえないという論理実証主義者の同一視に対して，ゲーデルは 2 種類の批判をしている．第一の批判は論文の前半部で示された結論の応用である．構文論的数学観のプログラムは，公理体系の数学的内容を構文論的解釈によって消去しようとするプログラムであ

る．あるいは，数学的直観を記号使用の規則で置き換えようとするプログラムであるともいえる．しかし，このプログラムは破産したわけである．

以上をふまえて，ゲーデルはつぎのようにいう．

> (32) 構文論的プログラムの実行不可能性をこのように定式化することは，数学は内容をもたないかという問いの解明にとくに適している．なぜならば，数学が一見もつかにみえる内容が誤った外見にすぎないならば，こうした「擬似的な」内容を用いずに満足のいく仕方で数学を構成することが可能でなければならないはずだったからである．[Gödel 1953/9-III, §30 p.346]

つまり，数学的命題は内容をもっているようにみえる．しかもその内容は経験的なものではない．構文論的数学観のプログラムは，この見かけ上の内容を構文論的解釈によって消去しようとする．しかし，そのプログラムは失敗に終わった．ということは，数学的命題は経験的でない内容をたしかにもっているのである．

もう一つの批判は数学的命題と自然法則の区別に関わる．数学はもしも正しいならばどのような可能な経験とも両立する．だから，自然に照らして検証可能な帰結を数学は一切もたない．ということは，数学は誤っているか，さもなければ内容をもたない．このような見解を標的にしてゲーデルはつぎのように答えている．

> (33) しかしながら，この推論が経験論の立場からも妥当でないことは，数学を抜きにした自然法則が，自然法則を抜きにした数学とまったく同様に「内容をもたない」という事実から帰結する．事のところ，自然法則が感覚経験によって検証可能な帰結をもつのは，数学（あるいは論理）と一緒にされたときだけである．それゆえ，すべての内容を自然法則の方に帰することには何の根拠もない．[Gödel 1953/9-III, §34 pp.348–349]

また，第 5 草稿にはつぎのような主張もみられる．

(34) ある種の物理学理論にとっては，新しい数学的公理（以前には決定不能だった数理物理学の問題を解いてくれるようなもの）が，新しい自然法則とまったく同様に，新しい経験的に検証可能な帰結を導くということがあってよい．[Gödel 1953/9-V, p.360]

自然科学の理論の検証において，数学の寄与分と自然法則の寄与分はそう簡単には分けられない，ということだ．内容は自然法則が独占していて，内容のない数学が，これに帰結を生み出すための推論の道具として加わる，という仕方で数学的言明と経験的言明とを分けるピクチャーをゲーデルは拒否しようとしている．一見すると，これはクワインの全体論を思わせる主張だ．しかし，両者はまったく異なる．クワインは，分析性と総合性の区別，数学的真理と経験的真理の区別を廃棄して連続的な真理観に向かうのに対して，ゲーデルは，以上の議論を，数学と物理のアナロジーを深め，物理だけに内容があって数学にはない，というのはおかしい，と主張するために行っている．ゲーデルにとって，数学的真理と経験的真理の区別は厳然としてある．

(35) 数学の本質にかんする構文論的な見方には，数学的真理と経験的真理との間にある根本的な違いを指摘してくれる，という利点があることは疑いない．この違いは，数学的命題は，経験的命題とは異なり，そこに現れる概念によって真になるという事実にある，と私は思う．[Gödel 1953/9-V, pp.356–357]

ここで首をかしげる人もいるかもしれない．概念によって真になる，というのは，言葉の意味によって真になるということではないか．だとすると数学的真理は分析的真理ということではないだろうか．しかし，数学的真理は規約によって真であるという規約主義者にとっても数学的真理は分析的真理ということになるだろう．規約主義者の考え方とゲーデルの考え方はどこが違うのだろうか．また，概念によって真になるということと，内容をもつということはどういう関係にあるのだろうか．この疑問に答えるためには，ゲーデルのプラトニズムとは何かということをもういちど考え直してみなければならない．

第4章
概念実在論と数学的直観

4.1　ゲーデルの概念実在論

まず,「集合論の対象」という言い方について反省してみよう．現代の分析哲学では，クワインの存在論的コミットメントの基準を受け入れて存在論的議論を行うことが慣例になっている．これによれば，ある理論がコミットしている存在者とは，その理論の公理が量化しているドメインに属するもののことである．公理的集合論の公理は，集合を量化しているから，集合論の対象は集合である．同じように，ペアノ算術の対象は自然数である．したがって，集合論についてプラトニスティックな解釈をする人は，集合の実在を認めていることになる．

ゲーデルが集合という対象の実在を信じていたという意味でプラトニストだったことは確実である．しかし，最近の遺稿研究から，ゲーデルのプラトニズムにはもう一つの，ひょっとしたらもっと重要な側面があることが分かってきた．

近年，ゲーデルのプラトニズムは，集合や数のようないわゆる数学的対象の実在論というよりは,「概念実在論 (conceptual realism)」と呼ぶべき立場だったのではないかという認識が広がってきている．1944 年の「ラッセルの数理論理学」からの引用 (12) をふりかえってみよう．「クラスと概念を実在

の対象として，つまりクラスを『多数のものの集まり』あるいは多数のものからなる構造として，そして概念をわれわれの定義や構成とは独立に存在するものの性質または関係として把えることだってできるのである.」ここではたしかにクラスの実在性が主張されているが，それと同時に概念の実在性がいわれている．利用可能なテキストが限られていた頃には，解釈者（筆者も含め）は，クラスに並んで概念がこの一節に現れていることにさしたる注意を払わなかった．この論文で論じられているのが，極端な概念実在論からスタートしたラッセルの哲学なので，ここに概念が現れるのも自然に感じられたという事情もあるだろう．

しかし，ゲーデルにとって重要だったのは，むしろ概念の実在論のほうだったのではないかと思われる．たとえば，引用 (34) に続く箇所ではつぎのようにいわれている．

> (36) たしかに，数学的命題は問題となっている構造の物理的性質を表しているわけではなく，そうした構造を記述するための概念の性質を表している．しかし，このことは，こうした概念の性質が物質の物理的性質と同じくらい客観的でわれわれの選択から独立しているものだということを示すにすぎないのである．[Gödel 1953/9-V, p.360]

また，ギブス講義にはつぎのような一節がある．

> (37) これまで私は意識して二つの分かれた世界（事物の世界と概念の世界）について話してきましたが，それは，アリストテレス的実在論（この考え方によれば，概念は事物の部分あるいは事物の一側面ということになります）が擁護できるものとは思っていないからです．[Gödel 1951, p.321]

ゲーデルは，数学の命題が内容をもつとしても，それは経験的内容ではないとする点で規約主義者に同意しつつ，数学が無内容だとする点では規約主義者を批判した．このことはすでに述べた．数学的命題と経験的命題はそれぞれ別の世界・実在を記述し，別種の内容をもつ．こうしてゲーデルは，一つの

世界しか認めないアリストテレス的実在論を批判して，二世界説的なプラトン的実在論の立場に立つ．そして，そのプラトニズム的世界の住人は，数や集合ではなく，まずもって概念なのである．この意味で，ゲーデルの「プラトニズム」は，現代分析哲学の枠組み，つまりクワインによる存在論的コミットメントの基準の中で主張される集合論的実在論（set theoretic realism，代表選手はペネロープ・マディ）[1]よりは，はるかにプラトンのそれに近い．われわれは，現代分析哲学の色眼鏡をかけてみていたために，ゲーデルのプラトニズムの重要な特徴を見逃していたかもしれないのである．

このことは，「数学の対象」あるいは「集合論の対象」という言葉遣いにも注意が必要になる，ということを意味する．集合論の対象？　そりゃ集合でしょ，というわけにはいかない．集合論の公理が措定している対象という意味では，たしかに集合を集合論の対象と呼んでもよい．しかし，集合論が研究の第一議的な主題としているのは，ゲーデルの場合，おそらく集合の概念である．つまり，集合論は，空集合や各種無限集合という対象の存在を措定しながら進んでいく，われわれとは独立な概念の世界に存在している〈集合の概念〉についての探求なのである[2]．

ついでにいえば，この時期のゲーデルは，概念の実在論を十分に展開し正当化することができなかったと思われる．ゲーデルが「数学は言語の構文論か？」の執筆を最終的に断念した理由は，シルプ宛の手紙によれば，思わず深入りしてしまった概念実在論を結局うまく扱うことができなかったことにあるとされている．

(38) その理由は明らかに，この主題が，哲学の基本問題の一つ

1) マディの集合論的実在論については，[Maddy 1990]，[Maddy 1997] を参照．ちなみに，マディの実在論は，チハラが「神秘的な能力」として批判したゲーデルの数学的知覚（集合の知覚）を，自然化された認識論に訴えて脱神秘化しようとするものであり，ゲーデルが「集合を直観によって知覚する」というテーゼを主張するものだと考えている点で，チハラのゲーデル観を共有している．

2) 「ゲーデルのプラトニズム」がこのような概念実在論であるとすると，1970 年頃に晩年のゲーデルが試みていた神の存在証明に対しても，新たな視点からみなおすことが可能になる．なぜなら，ゲーデルが試みていたのは「存在論的証明 (ontological proof)」と呼ばれるものであり，それは神の概念（の存在）から神の存在を示すタイプの証明だったからである．ゲーデルによる神の存在証明については [Gödel III, pp.388–402]，[Fitting 2002]，[Sobel 2004, chap.4] を参照．

と密接に関連していて，部分的にはそれと同一でさえあるからです．それは，概念および概念間の関係の客観的実在性という問題です．[Gödel V, p.244]

4.2　分析性の問題

ここではじめて，前章末尾で掲げた問い，つまり規約主義者にとっての分析性とゲーデルの「概念によって真なる数学的真理」という考え方の違いは何か，という問題に答えることができる．

1944年のラッセル論文の末尾には『プリンキピア』の公理は分析的だろうかという問いについての短い考察がオマケのようにして含まれている．ゲーデルがなぜこのような考察を付け加えたのかを理解することは簡単である．『プリンキピア』に現れる還元公理は，どんな命題関数にもそれと論理的に同値な可述的関数が存在する，ということを主張している．この公理をおくことによって，ラッセルは少なくともクラスについてはオーダーの階層を消去することができた．この公理は，与えられた命題関数に同値な可述的関数がどの関数であるかをわれわれが特定できなくとも，ともかくもその存在だけは保証してくれるという意味で，超越的・非構成主義的な色彩の強い公理である．

ところが，『プリンキピア』が論理主義のプログラムである以上，還元公理は単に真であるだけでは足りない．それは論理的真理でなければならない．しかし，還元公理ははたして論理的真理だろうか．このような観点から還元公理は批判にさらされてきた．たとえばウィトゲンシュタインの『論理哲学論考』にはつぎのような命題がある．

> (39) ラッセルの「還元公理」のような命題は論理の命題ではない．そしてこのことが，この類の命題がたとえ真だとしても，それが真でありうるのはひたすら幸運によるのではないだろうか，というわれわれの感情に説明を与えてくれる．[Wittgenstein 1922,

6.1232]

さらに続けて，

(40) 還元公理が当てはまらない世界を考えることはできる．しかしわれわれの世界は現実にそのような世界なのかという問いには，論理学は明らかに何の関係ももたない．[Wittgenstein 1922, 6.1233]

また，ラムジーもつぎのように述べている．

(41) この公理は，真であると想定すべき理由は何一つない．そして仮に真であるとしても，それは幸運な偶然であって，論理的必然ではない．なぜなら，それはトートロジーではないからである．[Ramsey 1925, p.179]

さらに彼は「このような公理は，数学には居場所がない．そしてこの公理なしでは証明できないようなものはすべて，そもそもまったく証明されたとはみなせない」とも述べている [Ramsey 1925, p.179]．しかし，分岐型理論に還元公理は不可欠である．還元公理を用いないと，通常の数学の主要部分が失われてしまうからだ．こうして，自分自身論理主義者だったラムジーは，分岐型理論を放棄し，単純型理論を採用することになった．

というわけで，還元公理を含む『プリンキピア』の公理が論理的真理であるかどうかという問いは，かなり重要な争点となっていたのである．ゲーデルはこの問いを，『プリンキピア』の公理は分析的かという問いに置き換えて考えようとした．そして，この考察の中で「分析的」という語に二つの意味が区別される．

(42) この問題に関して，分析性は二つの意味で理解されていることに注意しておくべきである．第一に，分析性は次のような純粋に形式的な意味をもつようだ．つまり，現れる語を，公理や定理が同一律の特殊例にまでなり，反証可能な命題はこの法則の否定になるといった仕方で定義できる（明示的定義によるのか，そ

の語を含む文からそれを消去するための規則によるのかは問わない）という意味である．（中略）第二の意味で命題が分析的だといわれるのは，命題が「自分の中に現れる概念の意味によって」真になるときである．この場合は，概念の意味が定義不可能な（つまりより基本的なものに還元することができない）ものであってもよいことになる．[Gödel 1944, pp.138–139, 邦訳 pp.82–83]

ゲーデルは，第一の意味では自然数論ですら分析的とはいえない，と述べている．たしかに，ラムジーのように無限の長さ，しかも非可算無限の長さの文を還元過程の中間ステップとして許すなら，還元公理も含めた『プリンキピア』の公理は同一律に還元でき，第一の意味で分析的だということになるかもしれない．しかし，この分析性を証明するためには，無限の長さの文を扱うために通常の数学を前提しなければならなくなる．ここにすでにギブス講義での規約主義批判の原型が現れていることは興味深い．

というわけで，『プリンキピア』の公理は第一の意味では分析的ではない．しかし，第二の意味では分析的であるといってよい，とゲーデルは判断している．そして，注の中で，この見解は，数学は実的な内容をもった公理に基づいているという，自分が擁護した見解と矛盾しない，と述べている[3]．

数学の分析性の問題は，ギブス講義で再びとりあげられている．

(43)（先に述べた結果が示しているように）これらの公理〔＝集合論の公理〕は実質的により単純ないかなるものにも還元できません．まして，明示的なトートロジーには還元できません．これらの公理が「集合」という語の意味によって妥当であるということは正しいでしょう．それらはまさに「集合」という語の意味を表現しているとさえいってもよいかもしれません．したがって，それらは分析的と呼ぶのがふさわしいかもしれません．しかし，これらの公理は「トートロジー的」だという言い方，つまり内容を欠いているという言い方をするのはまったく不適切です．なぜなら，これらの公理を満たす集合の概念が存在するという主張

3) [Gödel 1944, p.139, 邦訳 p.83] とそこにつけられた注 47 を参照．

（つまり，その公理の無矛盾性の主張）でさえ，内容を欠くどころか，集合の概念そのものあるいはそれと類似の本性をもつ他の何らかの抽象概念を再び用いることなしに証明できるものではないからです．[Gödel 1951, pp.321–322]

(44) 私はつぎのことをくり返しておきたいと思います．つまり，ここでの「分析的」という語は，「われわれの定義によって真であること」を意味するのではなく，むしろ「ものの性質と振る舞いによって真であること」と対比され区別された意味での，「そこに現れている概念の本性によって真であること」を意味しているのです．この分析的という概念は「内容を欠く」ということをまったく意味していません．ですから，分析的命題が決定不能（あるいは，ある確率においてのみ決定可能）になることは，まったくもってありうることなのです．というのは，概念の世界についての私たちの知識は，事物の世界についての知識と同じくらい，制限された不完全なものであるかもしれないからです．[Gödel 1951, p.321]

ギブス講義における規約主義批判は，数学が第一の意味で分析的であることはありえないということを示している．しかし，それでも数学は第二の意味では分析的である．それは，数学的命題は概念についてのものであり，概念のもつ本性によって真になるからである．

たとえば，集合論の公理系をつくったときにわれわれは集合の概念を生み出すわけではない．それに先だって，集合の概念はわれわれと独立に存在している．われわれはその概念の世界を完全にクリアに見通すことはできない．したがって，公理を立ててそこからの帰結を調べたり，帰納を用いたりという経験的方法によって探究を進めることも必要になる．集合論とはこのような仕方で進められる集合概念についての探究である．

こうして，数学は分析的だけれど実的内容をもつ，分析的だけれど経験的に真理が確かめられる，という非常に（少なくとも教科書的な哲学用語の理解に照らすと）特異な数学観が導かれる．しかし，これらは，数学の本性に

ついて概念実在論的な理解をとることからごく自然に帰結するのである.

4.3 概念実在論と数学的直観

ここまでで問われずに残された問題はつぎのものである. 数学が概念の学であるとしても, われわれはどのようにしてその概念を把握できるのだろうか. 言い換えれば,「集合」や「数」という語の意味の理解は何に存するのだろうか. 規約主義者であれば, 答えは簡単だ. これらの語についての規約を理解したとき, われわれはその語の意味を把握した, といえばよい. しかし, ゲーデルはこの選択肢はとれない.

そこでゲーデルが依拠したのが「数学的直観 (mathematical intuition)」だったと考えられる. ところで, 数学における内容の把握や, 数学的知識の説明に対して, ゲーデルが「直観」という語を使い始めるのは比較的遅くなってからである. パーソンズの詳細な調査によれば, 1944 年の「ラッセルの数理論理学」では,「直観」という語は 3 カ所にしか出てこない. しかも一つはヒルベルトからの引用中に現れるにすぎず, 残りの 2 カ所は, おおよそ「常識的な仮定」くらいの意味でしか使われていない. 1947 年の「カントルの連続体問題とは何か」では, 構成主義の話をしているところに 1 カ所だけ用いられる. 1951 年のギブス講義にはまったく登場しない [Parsons 1995, p.56]. 意外なことに, 神秘体験にたとえられ, ゲーデル批判のために多用されてきた「数学的直観」は, 途中まではゲーデル哲学のキーコンセプトではなかったのである.

「数学的直観」についてゲーデルが語り始めるのは, 1953–59 年の「数学は言語の構文論か?」からである. まず, ゲーデルはわれわれが数学的直観をもっている事実を認めようという.

> (45) 心理的事実として, 古典数学の公理全体について直観が存在することは, ほとんど疑いえない. それはブラウワーの学派を支持する者にとってさえ疑いえないことである. [Gödel 1953/9-III,

§7 n.12]

ここに引用した注は，数学の「直観的内容 (intuitive content)」という語句に対してつけられている．また，パーソンズによれば，数学的直観と数学的知識とが関連させて論じられ，数学的直観が数学的知識の不可欠の要素あるいは源泉だと位置づけられている箇所においても，ゲーデルは直観をもつことがすなわち知識をもつことになるという言い方を慎重に避けている[4]．一つだけ例をあげよう．

> (46) なぜならば，構文論が，数学的直観，および，数学的対象や事実を仮定することの代わりとなるのであれば，数学における「抽象的」かつ「超限的」概念——それは数学的直観やそうした直観の性質についての仮定なしには理解も使用もできない——の使用は，記号の有限的な組み合わせについての考慮に基づけられなければならないのはもちろんだからである．[Gödel 1953/9-III, §19 p.341]

「構文論」論文では，真なる数学的命題を手に入れるのに通常用いている手段を構文論によって肩代わりできるかどうかが問題になっていたことを思い出そう．この引用箇所では，構文論が代役を務めることになっているものは，数学的直観だけではない．数学的対象や事実の存在措定も付け加えられている．ということは，数学的直観だけでは真なる数学的命題をすべて手に入れるには足りないということだ．さらに，数学的直観が数学における概念の理解と使用をもたらすものとされていることにも注意しよう．そうすると，数学的直観は，数学的知識を手に入れるためには不可欠のもの（構文論では代用できないもの）だが，よく考えられているような数学的知識の源泉，つまり数学的真理を直接に把握する能力ではないということになる[5]．むしろ，以上のことを考え合わせるならば，数学的直観は，数学が対象とする概念を（もしかしたら不正確に）把握し理解するための能力，数学的内容を把握する能力といえるだろう．こうした理解は，ゲーデルが数学的知識を獲得するため

4) [Gödel 1953/9-III, §16 p.340]，[Gödel 1953/9-V, p.361]，[Parsons 1995, p.60].
5) 引用 (54) を参照.

の手段として，帰納的方法や，新公理を立てて実り豊かな帰結をもたらすかを調べるという（数学的直観とは別の）方法も認めていたこととも整合する．

4.4　数学はなぜ経験科学に適用できるのか

以上のようにゲーデルの「数学的直観」のとらえ方を整理することによって，一つの疑問に答えを与えることができる．すでにみたように，「数学は言語の構文論か？」において，ゲーデルは，経験的世界と数学的概念の世界とをきっぱりと分ける二世界説的なプラトニズムをとっていた．

> (47) 感覚的知覚によって，われわれは，個別的対象とその性質および関係を知るのに対して，数学的理性によって，われわれは，もっとも一般的（すなわち「形式的」）な概念およびその間の関係を知覚するのであり，時空的実在が，形式的概念に言及することなしに，個別者 (particularities) の全体によって完全に決定されるかぎりでは，概念とその間の関係は，時空的実在から切り離されているからである．[Gödel 1953/9-III, §42 p.354]

ところが一方で，数学的命題は実的内容をもつということを主張するために，ゲーデルはつぎのようにも論じていた．自然法則が検証可能な帰結をもつのは数学と一緒にされたときだけなのだから，自然科学の命題は内容をもつが数学的命題は無内容である，という具合にすべての内容を自然法則のほうだけに帰することには根拠がない．また，ある種の数学的命題を検証するためには，それが経験科学に対してもつ帰結を用いてもよいというのもゲーデルの立場だった．これもすでに確認したとおりである．

そうすると，つぎのような疑問が生じてくる．もし，数学が対象とする抽象的概念の世界と物理学が対象とする物理的世界とは交わることのない別世界なのだとするなら，どうして数学的命題が経験科学に対して帰結をもちうるのだろうか．あるいはそもそも，自然法則の検証可能な帰結を引き出すために，経験科学の命題と数学とを「一緒に」するなどということがなぜ可能

なのだろうか.

これはようするに，数学はなぜ，どのようにして応用可能 (applicable) なのかという問いである．規約主義者や形式主義者には比較的簡単な答えが用意されている．数学は無内容な記号変形ゲームだが，自然科学の言語に適用することによって経験的命題から経験的命題への推論を単純化するための推論の道具として役に立つ．もちろん，この主張を裏付けるためには，数学を自然科学の体系に適用して得られる体系がもとの体系の保存拡大になっていることを証明しなければならない．さもないと，数学は自然科学に内容を付け加えることになってしまい，無内容とはいえなくなるからだ．こうしたプログラムがうまくいくかはここでは問わないが，とりあえずこのような方向の答えがありうることは認めてよいだろう[6].

しかし，この方向をゲーデルがとることはできないことは明らかである．数学的命題は独自の実的内容をもつと考えているからだ．だから彼にとっての問題は，数学的内容と経験的内容はどのようにして一部でよいからオーヴァーラップすることができるのか，というものである．

では，概念実在論をとることによって，こうした問いに対してどのような答えが与えられるのだろう．経験科学に数学を適用する場面についてゲーデルはつぎのように述べている．

> (48) 物理法則に数学が付け加えるものが，物理的実在の新しい性質ではないということはたしかに正しい．だが，それは，物理的実在に関わる概念がもつ性質——もっと正確には，事物の結合に関わる概念がもつ性質——を付け加えるのである．[Gödel 1953/9-III, §34 p.349]

二世界説的なプラトニズムによれば，経験的世界は数学とは独立にありさまや構造が決まっている．だから数学は，物理的実在に新しい物理的性質を付け加えたりはしない．数学は，そのように独立性をもって決定されている物

---

6) このようなプログラムをニュートンの重力理論を対象に厳密に実行した例が [Field 1980] である．フィールドのプログラムの解説としては [戸田山 1998]，[戸田山 2003] を参照．

理的構造を記述する際に，抽象概念をいわば混ぜ込むことによって，物理学に適用されるのである．この論点に関連して，第 5 草稿にはつぎのような箇所がある．

> (49) 数学的直観と物理的感覚の類似性には驚くべきものがある．「これは赤い」を直接的な与件 (immediate datum) とみなすのは恣意的である．しかし，モードゥス・ポネンスや完全帰納法（あるいはおそらく後者がそこから帰結するもっと単純ななんらかの命題）を表現する命題を〔直接的な与件と〕みなすのは恣意的ではない．というのも，こうした違いは，ここで関連するかぎりにおいてではあるが，最初のケースでは概念と特定の対象の関係が知覚されているのに対し，第二のケースでは知覚されているのは概念同士の関係であるという事実にのみ存するからである．[Gödel 1953/9-V, p.359]

ゲーデルのテキストの中で，この引用 (49) がおかれている文脈は，われわれがここで扱っている問題とは微妙にずれている．しかし，重要なのは最後の文である．物理的感覚の場合には，対象と概念の関係が知覚され，数学的直観の場合には，概念同士の関係が知覚される．つまり，物理的感覚の場合にも，概念の直観的把握は構成要素として含まれる．だとすると，概念把握の能力としての数学的直観は，物理的経験の中にもすでに前提されていることになる．

この草稿では，ゲーデルはこうしたアイディアをこれ以上展開していない．しかしながら，こうした乏しい証拠だけからでも，つぎのことは確認できる．つまり，数学の経験科学への適用可能性の問題をゲーデルは考えており，その可能性を保証する役割を（数学的）直観に期待していたということである．こうして，数学的内容はいかにして把握されるか，数学的内容はいかにして経験的内容に適用しうるか，という二つの問題を解くカギとして数学的直観がクローズアップされてくる．

もう一つ指摘しておかなくてはならないことがある．引用 (49) に例示したような，「直観」概念が果たすようになった新たな役割には，おそらくフッ

サール現象学の影響があっただろう，という点である．ワンによれば，ゲーデルは「構文論」論文の執筆をあきらめた1959年にフッサールを勉強し始めた [Wang 1987, p.658]．フッサール研究にはかなり熱中したらしく，ゲーデルは『論理学研究』，『イデーン第1巻』，『危機』，『デカルト的省察』を手に入れていた．そして，書き込みや下線の引き具合から判断して，それらを相当読み込んでいたとのことである7)．そこで，この点について参考になる草稿に目を転じることにしよう．

4.5 「哲学からみた数学基礎論の現代的展開」(1961)

「哲学からみた数学基礎論の現代的展開」は，1961年の暮れに書かれた講義の草稿である．ゲーデルは，1961年にアメリカ哲学会 (American Philosophical Association; APS) に入会した．ドイツ語速記体で書かれたこの草稿は，学会秘書 (G. W. コーナー) からの，慣例により新入会員は20分の講演を行うことになっている旨を知らせる手紙（1961年12月13日）と同じ封筒に収められた状態でみつかった．そこで，その講演のための草稿として書かれたのだろうと推測されている．しかしながら，講演は実際にはなされなかった．

これは，20世紀の数学基礎論の展開を哲学的観点から叙述したものである．その際に，哲学的世界観 (Weltanschauungen) を整理するための一般的な枠組みを提案し，その枠組みに数学基礎論のさまざまな立場を当てはめて説明しようと試みている．ゲーデルが哲学史上の主要な立場に対してどのようなとらえ方をしているかが窺えて興味深い資料となっている．

ゲーデルの与えた枠組みは，形而上学へのコミットメントの深さを尺度としたスペクトラムである．左端には，懐疑論，唯物論，実証主義などが位置し，右端には，唯心論，観念論，神学が位置している．ゲーデルによれば，哲学は，ルネサンス以来，徐々に右から左に動いてきた．しかし，数学はそのアプリオリ性によって，そもそも右に向かう傾向があり，哲学の左に向かう

7) [Gödel 1961] に対するダグフィン・フェレスダールの解説 [Gödel III, pp.367–368] を参照．

傾向に逆らってきた．しかし，20 世紀初頭に集合論の矛盾が発見され，「その意味が経験論者や懐疑論者によって大げさに喧伝された」ことにより，数学でも左に向かう傾向が強まっている．これがゲーデルの歴史認識である．

さて，そこでどうするか．もはや，数学を真理の完全な体系とみなす右端の見解はとれない．これは不完全性定理から明らかである．さりとて，公理の真理は正当化できないのだから数学を記号変形ゲームとみなそう，とする左端の見解（規約主義・唯名論）もゲーデルはとらない．右も左も，数学の真理性を公理からの演繹可能性と同一視するという間違いを共有しているからだ．おそらく，正解は両極の中間にある．正解に達するためには，数学の真理を公理からの演繹可能性とみなすことをやめ，数学を真理の体系とみなすことが重要である．

興味深いのは，ゲーデルは，ヒルベルトを右と左のうまい組み合わせをみつけようとしたが，左に引っ張られすぎて失敗した人物と評価している点である．そして，その評価を受けてつぎのように述べる．

> (50) 明らかにこのこと〔＝ヒルベルトの失敗〕が意味しているのはつぎのことです．つまり，数学の確実性は，物の体系への投影つまり物理的記号の操作によって，しかるべき性質を証明することで確保されるのではなく，そうした機械的な体系をうちたてるための抽象的概念それじたいについての知識を錬磨し（深め），さらに，同じ手続きによって，すべての意味のある数学的問題の解決可能性と解決のための実際の手段についての洞察を得ることによって確保される，ということです．[Gödel 1961, p.383]

ここでいう「抽象概念の知識を深める」とは，概念を厳密にして，それらの概念について成り立つ公理を洞察するということだと説明されている．重要なのは，これは概念に明示的定義を与え，公理をその定義に基づいて証明することでは代替できないという点だ．なぜなら，それをするためには他の抽象概念が必要になるからであるし，連続体仮説のような決定不能問題の解決には新しい公理をみつける，という作業が必要だからである．したがって，この手続きは，その概念の意味を明晰化することでしかありえない．

で，この意味の明晰化のための手段として，ゲーデルはフッサールの現象学に注目する．ゲーデルが理解した現象学は，学というよりは方法であって，それはつぎのように説明されている．

> (51) ここでは，意味の明晰化というのはつぎのことに他なりません．すなわち，われわれの注意をある仕方で，つまり，概念を用いる際のわれわれ自身の作用や，そうした作用を遂行する際のわれわれの能力へと向けることによって，関わりをもつ概念により鋭く焦点を合わせる，ということです．（中略）そのような手続きを最初から無謀なものだと斥けてしまうことには根拠はないと私は確信しています．[Gödel 1961, p.383]

最後に，こうした現象学的方法は，カントの数学のとらえ方とも一致する，どころかカントにまで遡ることができるとされている．フッサールはあいまいに表現されていたカントのアイディアを洗練させたと位置づけられている．『ゲーデル全集 III』でのフェレスダールの解説によれば，数学の経験科学への適用可能性の問題は，フッサールから答えが与えられる．フッサールは，直観には物理的対象についての知覚と，抽象的対象についてのカテゴリー直観の 2 種類があると考えていた．そして，重要なのはつぎの点である．フッサールによれば，物理的対象の知覚の中には，すでに，たんなる感覚を超えたもの，すなわち対象の観念それ自体が含まれている．

4.6 「カントルの連続体問題とは何か」への補遺 (1964)

ベナセラフとパトナムは，数学の哲学についてのアンソロジーを編纂・出版する目的で，ゲーデルに「ラッセルの数理論理学」(1944) と「カントルの連続体問題とは何か？」(1947) の二つの論文の再録許可を要請した．最初，ゲーデルは再録を渋っていたらしい．というのも，アンソロジーの解説で自分の哲学がどのように書かれるのかが心配だったようだ．結局，解説の原稿を事前にゲーデルにみせることと，解説では哲学的主張は行わないつもりだと

いうことを編者たちが約束して，ゲーデルは再録を許可した．ラッセル論文のほうはほとんど変更なしで再録されたが，カントル論文に対しては，ゲーデルは 100 カ所以上におよぶ訂正・加筆を行った．そのほとんどは誤字の訂正だったが，いくつか大きな訂正もある．

本文の大きな訂正としては，たとえば，引用 (15) で「これらの概念と公理が何らかの充分に確定された実在を記述していると信じる者にとってはそうではない」という言い方だったところが，「もし集合論の諸々の原始語の意味が健全なものとして受け入れられるならば，その場合，集合論的な諸概念と諸定理は何らかの充分に確定された実在を記述しており，この実在においてはカントルの予想は真か偽のいずれかでなければならない，ということが導かれるからである」となっており，プラトニズムへのコミットメントが深まっていることが窺われる [Gödel 1964, p.260]．この他にもいくつかの注が削除・拡大・追加されているが，最も大きな変更は，「第二版への補足 (supplement)」と「後記 (postscript)」が追加されたことである．「後記」はこのアンソロジーがまさに印刷されているときに追加されたもので，1963 年にコーエンが連続体仮説の独立性の証明に成功したことが記されている．「補足」は約 4 ページの分量のあるかなり長いもので，ここでゲーデルはプラトニズムと数学的直観についての，まとまった（しかし難解な）哲学的思索を展開している．ここでとりあげるのはこの「補足」である．

「補足」は，まず，1947 年にこの論文が書かれてから得られた，新しい結果を列挙することから始まっている．それを受けて，つぎのような見解が検討される．非ユークリッド幾何が無矛盾であることが分かって，第 5 公準（いわゆる平行線公理）が真か偽かという問いが無意味になったように，連続体仮説が決定不能であることが分かったとしたなら，そのことは，その真偽を問うことが無意味になったということを意味するのではないだろうか．

この見解に対して，ゲーデルは，集合論の状況と幾何学の状況はまったく異なるので，幾何学についていえることを，そのまま集合論に適用して上記のような議論を行うことはできないと答える．

ゲーデルは，まず到達不可能数の存在公理を例にとりあげる．この公理は集合論の通常の公理系 A からは決定不能である．ところが，通常の公理系

に到達不可能数公理を付け加えた体系（これをA+と呼ぼう）と到達不可能数公理の否定を付け加えた体系（A–）とでは，つぎのような非対称性がある．A– にはAにおいて定義できるモデルがあって，それがA– のモデルであることをAの中で証明できるのに対し，A+にはそのようなモデルはない．この意味で，A+のほうがAの「強い拡張」だということができる．このことに関連して，到達不可能数の存在公理は自然数についての新しい定理を帰結するが，その否定はそのような帰結をもたない．

同じ非対称性が，連続体仮説についても成り立つ（ただし，肯定と否定が到達不可能数公理の場合とは逆）．連続体仮説を通常の公理系に付け加えた体系は，もとの公理系で構成可能なモデルをもつが，その否定を付け加えた体系はそうではない．この議論は1947年段階での議論とほぼ同じである．つまり，実り豊かな拡張をもたらすかどうかという基準によって既存の公理から決定不能な命題の真偽を定めることができるという趣旨の議論だ．到達不可能基数の公理の場合は，その肯定形が実り豊かな拡張をもたらし，連続体仮説はその否定形が実り豊かな拡張をもたらす．

ところが，ユークリッドの第5公準の場合は，こうした非対称性をもたない．この公準もその否定も同じように弱い拡張をもたらすにすぎないのである．したがって，第5公準と連続体仮説のアナロジーは成り立たない．

以上の数学的観点からの議論に加え，両者のディスアナロジーについて，ゲーデルはつぎのような「認識論的観点からの議論」も行っている．

> (52) 認識論的な状況に関して言えば，或る問いがその決定不能性の証明によって意味を失うのは，考察されている公理系が仮説演繹的体系として解釈された場合，つまり，原始語の意味が未決定のままにされている場合に限ると言わねばならない．たとえば幾何学で，ユークリッドの第五公準が真か偽かという問いは，原始語が確定的な意味で理解されるならば，つまり，それらの語が剛体や光線などの振る舞いを指すものとして理解されるならば，けっして意味を失わない．集合論における状況はこれと類似している．[Gödel 1964, p.267, 邦訳 p.35]

以上の議論が終わったあとに，ゲーデルは四つのパラグラフからなるプラトニズムの正当化のための議論に舞い戻る．この部分こそ，長い間ゲーデル解釈者を悩ませてきた「謎めいた」議論だったのである．しかし，これまでに展開してきた概念実在論と数学的直観についての考察を援用することによって，少しは脱神秘化することが可能になる．まず，最初のパラグラフを検討しよう．

> (53) しかしながら，集合論の対象は感覚的経験の遠く及びえないものであるにもかかわらず，われわれは確かに，これらの対象についても何か知覚に類するもの (something like a perception) を持っている．このことは，公理が自らを真なるものとして受け入れるようわれわれに対して迫ってくるという事実から理解されるとおりである．われわれは感覚知覚に促されて，物理学的理論を打ち立て，未来の感覚知覚がこれらの理論と一致するであろうと期待し，さらには，現在決定できない問いも意味を持ち将来決定できるであろうと信じる．そのようにわれわれが感覚知覚に信頼を置くのと同様に，上に述べた種類の知覚，すなわち数学的直観に対してもわれわれは信頼を置いてよいはずであり，私の見る限りでは，そうしてはならないとするような理由はまったくない．集合論的パラドクスは，感覚の誤ちが物理学にとって困難を招くものでないのと同じく，数学にとって何ら困難を招くものではない．すでに指摘したように，カントルの連続体仮説のような問題の決定へと導く新たな数学的直観は，何の問題もなく可能なのである．[Gödel 1964, p.268, 邦訳 p.36]

ここでいう，「集合論の対象 (the objects of set theory)」を数学的対象としての集合と即断してはならない．ゲーデルは「集合論の対象についての知覚」について語っているのであって，「集合の知覚」について語ってはいないことにも注意しよう．概念実在論の文脈で理解するならば，この「集合論の対象」はおそらく集合の概念，要素関係の概念等々の概念である．

パーソンズは，この箇所に関して興味深い問題を指摘している [Parsons 1995,

p.65]．たしかに，公理が自らを真なるものとして受け入れるようわれわれに対して迫ってくるという体験（... ということについての数学的直観，intuition that）は心理的事実としてあるだろう．このことから，ゲーデルは，集合論の対象についてわれわれが知覚に類するもの（... の数学的直観，intuition of）をもっているという帰結を導いている．ここには明らかに飛躍があるように思われる．この移行はいかにして正当化されるのだろうか．

後者の「知覚に類するもの」がそれについてのものであるところの「集合論の対象」は，集合の概念や要素関係の概念だとしよう．その上で，引用 (53) をつぎのように解釈してみる．引用 (12) の読解において指摘したように，完全帰納法は数学的直観 (intuition that) の直接的な与件とみなすことができる．つまり，直観によって正しいものとしてとらえられる．このとき，この正しさの直観的把握において，概念と，概念同士の関係が知覚 (inuition of) されている．つまり，ある命題を「正しいとして迫ってくる」ものとして直観しているとき，その命題の構成要素である概念が直観の対象として与えられているのである．パーソンズはこれが先程の「移行」の隠された前提になっているという [Parsons 1995, p.65]．

この考え方を，ゲーデルはおそらくラッセルから学んだのではないかと思う．『プリンキピア』のラッセルは「判断の多重関係理論 (multiple relation theory)」と呼ばれる考え方をもっていた．それによると，判断は心と命題の 2 項関係ではなく，命題の構成要素となるいくつかの概念と心との間に成り立つ多項関係である．ここから，ラッセルは判断の対象とされる命題なるものは，実は単一の存在者ではないとし，命題を表す句は不完全記号だという結論を導く [Russell and Whitehead 1910–1913, p.44]．

続く第 2 パラグラフは最も理解しにくい箇所である．

> (54) 注意せねばならないのは，数学的直観を，それが関わる対象の直接的な知識を与える能力としてとらえる必要はないということである．むしろ物理的経験の場合と同様に，われわれは数学的対象の場合についても，何か他の直接に与えられるものを基礎にして，それらの対象の観念 (idea) を形成するのだと思われる．

ただ数学的直観の場合，この何か他のものというのが感覚ではないということ，あるいは，まず第一に感覚ではないということである．この感覚以外の何かが現に直接的に与えられるということは，つぎのような事実から（数学からは独立に）導き出される．すなわちその事実とは，物理的対象に関するわれわれの観念でさえも，感覚や感覚の単なる組み合わせ (combinations) とは質的に異なった構成要素を，つまりたとえば対象それ自身の観念 (the idea of object itself) を含んでいるということ，しかも他方で，われわれは，われわれの思惟 (thinking) によってはいかなる質的に新たな要素を創造することもできず，もっぱら与えられたものを再生産し組み合わせる (reproduce and combine) にすぎない，ということである．明らかに，数学の根底にある「与えられたもの」は，われわれの経験的観念のうちに含まれる抽象的な諸要素と密接に関係している．だがこの第二の種類の所与は，たしかにわれわれの感覚器官に対する特定の諸事物の作用に結び付きうるようなものではないが，そうであるからといって，けっしてカントが主張したように何か純粋に主観的なものであるといったことにはならない．むしろ，こうした所与もまた客観的実在のある側面 (an aspect of objective reality) を表象しうるのであって，ただ感覚の場合とは対照的に，それらの所与のわれわれのうちにおける現前は，われわれ自身と実在とのある他の種類の関係によるものであろう，ということである．[Gödel 1964, p.268, 邦訳 p.37]

数学的直観によってまず直接に与えられるのは，対象ないし対象の知識ではない．この箇所を理解するには，ゲーデルがフッサール現象学から，そしてそのルーツと彼がみなしたカント哲学から学んだことを考慮に入れる必要がある．実際，ゲーデルはこのパラグラフにつぎのような注をつけている．

(55) 集合の概念と，カントの意味での純粋悟性のカテゴリーとの間には密接な関係があることに留意されたい．すなわち，両者と

もその機能は「総合」であり，つまり統一性を多様性から生成させること（例えば，カントにおいては，一つの対象をその多様な諸側面 (aspects) から生成させること）なのである」[Gödel 1964, p.268 note 40, 邦訳 p.44]

物理的対象の知識がどのように得られるかを，カント哲学の枠組みを意識しながら述べてみよう．対象の知識は，感官に直接与えられる感覚与件だけでは尽くせない．そうした感覚所与ないしその複合に，「対象それ自身」というそれとは質的に異なった概念が適用されてはじめて，対象の知識が生まれる．これと同様に，数学的対象についての知識も，数学的直観に直接に与えられるものを基礎にして，それに「対象それ自身」という概念が付け加わって，数学的対象についての観念が形成される．

ここでのポイントは三つある．まず第一に，数学的直観は，普通考えられているように，あるいは神秘主義者としてのゲーデル像が暗黙のうちに前提しているように，数や集合といった数学的対象の直接的な知識を与える神秘的能力ではない．これは，感覚知覚が物体の直接的な知識（物体そのもの）を与えるのではないのと同様である．第二に，物理的対象の概念にも，その構成要素として，感覚だけでなく，「対象それ自身」といった抽象的概念が含まれている．「数学の根底にある与えられたもの」〔＝抽象的概念〕は，物体といった経験的観念にも含まれるのである．

第三に，これはカントから大きく逸脱する点になるが，ゲーデルはどうやら，感覚の多様をまとめ上げる抽象的概念「対象それ自身」も，カントのように悟性のアプリオリな寄与，つまりわれわれの心のほうに備わっているものなのではなく，直観によって外から与えられるものと考えているようだ．なぜなら，ゲーデルは「経験的観念のうちに含まれる抽象的な要素」を「第二の種類の所与」と呼んでいるからだ．そしてさらに，この第二の所与はカントが主張したような主観的なものではない，といわれている．

まとめてみよう．物体のような物理的対象にせよ，集合のような数学的対象にせよ，感覚や直観に直接与えられるのではない．感覚が直接的に与えるのは感覚の多様であり，数学的直観が直接的に与えるのは何か他の多様であ

る．そして，数学的直観に与えられる「対象それ自身」といった抽象的概念が，感覚の多様を総合して物体の観念を生み，「何か他の多様」を総合して統一体としての集合の観念を生じる．この平行性が妥当なものであれば，われわれは，少なくとも物体の存在措定と同様の資格をもって集合の存在措定をすることが正当化されるだろう．

もう一つ注目すべきなのは，思惟 (thought) の能力についてのゲーデルの見解である．明らかに，思惟は組み合わせ的再配置 (combination) の能力として考えられている．しかし，これは「いかなる質的に新たな要素を創造することもでき」ない．感覚に与えられた多様を思惟によって組み合わせたり再配置しても物体の観念を生み出すことはできない．そのためには，総合の契機としての抽象概念が必要で，それを得るためには直観が必要とされる．これと同様に，思惟だけでは集合とか数といった対象の観念は生み出されない．そのためには直観が必要なのである．組み合わせ再配置の能力とは，構文論的数学観が想定している能力である．ここでゲーデルは，数学に，集合のような数学的対象といった実的内容をもたらすには，組み合わせ的な思惟では足りず，抽象概念を把握する能力である直観の作用が不可欠だという論点をくり返しているように思われる．

さて，物理的対象の観念には経験的要素と数学的・概念的要素の両方がかかわっているという考え方は，たしかになぜ物理的世界に数学が適用できるのかという問いに一定の答えを出すのに役立つかもしれない．しかし，この展開はちょっと困った問題をわれわれに対して投げかけている．この考えは，物的世界と観念の世界という，ゲーデルがこれまで主張してきた二世界説的なプラトニズムと折り合いが悪いように思われるからだ．少なくともこの考えは，物理的世界の構造は形式的概念によらず決まっている，という考え方には反する．この点で気になるのは，このパラグラフの末尾である．ここでは，感覚所与だけではなく，概念的所与も（カント的アプリオリのような主観的なものではなく）外部の客観的実在からやって来る，といおうとしているのだが，「こうした所与は客観的実在から得られる」というストレートな言い方ではなく，「こうした所与は客観的実在のある側面を表象している」という言い回しになっている．また，感覚と数学的直観に与えられる所与は，それ

ぞれ違った実在からやってくる，とはいわずに，それらのわれわれのうちにおける現前は，われわれと実在とのそれぞれ異なった種類の関係による，ともとれる言い方をしている．ここで，ゲーデルは同じ実在論者でも，二世界説的なプラトン主義ではなく，一つの世界のうちに抽象的概念も住まうアリストテレス的実在論に向かおうとしているのだろうか．残念ながら，この問いを考えるための材料はあまりにも足りない．

4.7 ゲーデルの「哲学」はいかに読まれるべきか

以上，ゲーデルのプラトニズムを概念の実在論と規定し，数学的直観を概念把握の能力としてとらえる視点からゲーデルの錯綜したテキストを読解してきた．この視点を選ぶことによって，これまで「まるっきり分からなかった」ゲーデルのプラトニズムが，「あまりよく分からない」程度にはなるのではないかと思う．同時に，ゲーデルが，この世から隔絶した集合の世界があって，数学者はそれを直観で覗いてくるのだと主張するような神秘主義者にみえてしまう理由もある程度分かったのではないだろうか．チハラに代表されるそうしたゲーデル像は，おそらく，引用 (12) の冒頭のような文を，現代分析哲学における数学的実在論論争（集合は存在するか否かを問う）に引きつけて，集合という対象の存在を主張するのがゲーデルのねらいだと理解した上で，そのテキストを，20 年も後の (53) などと結びつけて，そのような集合をわれわれは数学的直観によってとらえることができるということがいわれていると解釈することによって生じたものだろう．それが，根拠のない幻であることは本稿によって示されたのではないだろうか．

もちろん，ゲーデルのプラトニズムにはまだまだ分からないところがたくさん残っている．しかし，どのような読解が試みられるにせよ，つぎの点は考慮されなければならないと思われる．つまり，(i) ゲーデルのプラトニズムは少なくとも 20 年以上の時間をかけてゆっくりと発展している．したがって，テキストの執筆年代を考慮に入れてアナクロニズムに陥らないようにすること．(ii) ゲーデルは集合の実在よりもむしろ概念の実在について多くを

語っているということを考慮すること．(iii) ゲーデル哲学は，現代分析哲学よりも，カント，フッサールなどの哲学の文脈で理解すべきではないかということ．(iv) ゲーデルは，数学を経験科学から孤立させて考察していたのではなく，経験科学への適用という文脈を無視せずに考察していたということ．

ゲーデルはたしかに哲学のフォーマルな教育を受けていたわけではなかった．しかし，少なくともアメリカ移住後のゲーデルは数学に費した以上の時間を哲学に費したのであり，その思考からわれわれはまだ多くのことがらを学ぶことができるはずなのである．

参考文献

[Benacerraf and Putnam 1964] Benacerraf, P. and Putnam, H. (eds.), *Philosophy of Mathematics*, Prencice Hall (1964).

[Carnap 1937] Carnap, R., *The Logical Syntax of Language*, Routledge & Kegan Paul (1937).

[Cassou-Noguės 2005] Cassou-Noguės, P., "Gödel and 'the objective experience' of mathematical objects," *History and Philosophy of Logic*, **26** (2005), 211–228.

[Chihara 1982] Chihara, C., "Gödelian thesis regarding mathematical objects: do they exist? and how can we perceive them?," *Philosophical Review*, **11** (1982), 211–228. 邦訳：黒川英徳訳「数学的諸対象に関するゲーデルのテーゼ：それは存在するか？　そしてわれわれはそれを知覚することができるか？」in [飯田 1995], pp.97–119.

[Chihara 1990] Chihara, C., *Constructibility and Mathematical Existence*, Clarendon Press (1990).

[Davis 2005] Davis, M., "What did Gödel believe and when did he believe it?", *The Bulletin of Symbolic Logic*, **11**, no.2 (2005), 194–206.

[Dawson 1997] Dawson, J. W., *Logical Dilemmas: The Life and Work of Kurt Gödel*, A K Peters (1997). 邦訳：村上祐子・塩谷賢訳『ロジカル・ディレンマ：ゲーデルの生涯と不完全性定理』新曜社 (2006).

[出口 2007] 出口康夫「ゲーデルとスコーレム」,『現代思想：総特集ゲーデル』青土社 (2007), 164–179.

[Field 1980] Field, H., *Science without Numbers*, Blackwell (1980).

[Fitting 2002] Fitting, M., *Types, Tableaus, and Gödel's God*, Kluwer (2002).

[Gödel 1933] Gödel, K., "The present situation in the foundations of mathematics" (1993) in [Gödel III], pp.45–53.

[Gödel 1944] Gödel, K., "Russell's mathematical logic" (1944) in [Gödel II], pp.119–141. 邦訳：戸田山和久訳「ラッセルの数理論理学」in [飯田 1995], pp.57–95.

[Gödel 1947] Gödel, K., "What is Cantor's continuum problem?" in [Gödel II], pp.176–187.

[Gödel 1951] Gödel, K., "Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications" (1951) in [Gödel III], pp.304–323. 邦訳：高橋昌一郎訳「数学基礎論における幾つかの基本的定理とその帰結」,『現代思想：総特集ゲーデル』青土社，2007 年 2 月，8–27.

[Gödel 1953/9-III] Gödel, K., "Is mathematics syntax of language?" (1953), version III in [Gödel III], pp.334–355. 邦訳：飯田隆訳「数学は言語の構文論か」,『現代思想：総特集ゲーデル』青土社，2007 年 2 月，28–51.

[Gödel 1953/9-V] Gödel, K., "Is mathematics syntax of language?" (1959), version V in [Gödel III], pp.356–362.

[Gödel 1961] Gödel, K., "The modern development of the foundations of mathematics in the light of philosophy" (1961) in [Gödel III], pp.375–384.

[Gödel 1964] Gödel, K., "What is Cantor's continuum problem?" (1964) in [Gödel II], pp.254–270. 邦訳：岡本賢吾訳「カントールの連続体問題とは何か」in [飯田 1995], pp.17–55.

[Gödel II] Feferman, S. *et al.* (eds.), *Kurt Gödel Collected Works Volume II Publications 1938-1974*, Oxford University Press (1990).

[Gödel III] Feferman, S. *et al.* (eds.), *Kurt Gödel Collected Works Volume III Unpublished Essays and Lectures*, Oxford University Press (1995).

[Gödel IV] Feferman, S. *et al.* (eds.), *Kurt Gödel Collected Works Volume IV Correspondence A-G*, Oxford University Press (2003).

[Gödel V] Feferman, S. *et al.* (eds.), *Kurt Gödel Collected Works Volume V Correspondence H-Z*, Oxford University Press (2003).

[飯田 1995] 飯田隆編『リーディングス 数学の哲学 ゲーデル以後』勁草書房 (1995).

[飯田 2007] 飯田隆編『哲学の歴史：第 11 巻 論理・数学・言語』中央公論新社 (2007).

[Maddy 1990] Maddy, P., *Realism in Mathematics*, Clarendon Press (1990).

[Maddy 1997] Maddy, P., *Naturalism in Mathematics*, Clarendon Press (1997).

[Martin 2005] Martin, D., "Gödel's conceptual realism," *The Bulletin of Symbolic Logic*, **11**, no.2 (2005), 207–224.

[Parsons 1995] Parsons, C., "Platonism and mathematical intuition in Kurt Gödel's thought," *The Bulletin of Symbolic Logic*, **1**, no.1 (1995), 44–74.

[Potter 2001] Potter, M., "Was Gödel a Gödelian Platonist?," *Philosophia Mathematica*, **9** (2001), 331–346.

[Ramsey 1925] Ramsey, F. P., "The Foundations of Mathematics," *Proceedings of the London Mathematical Society* series 2, **25** (1925), pp.338–384; repr. in Ramsey, F. P., *Foundations: Essays in Philosophy, Logic, Mathematics and Economics*, Mellor, D. H. (ed.), Routledge (1978), pp.152–212.

[Russell and Whitehead 1910–1913] Russell, B. and Whitehead, A. N., *Principia Mathematica*, Cambridge University Press.

[Schilpp 1944] Schilpp, P. A., *The Philosophy of Bertrand Russell*, Librry of Living Philosophers, vol.5, Northwestern University Press (1944).

[Sobel 2004] Sobel, J. H., *Logic and Theism: Arguments for and against Beliefs in God*, Cambridge University Press (2004).

[高橋 1999] 高橋昌一郎『ゲーデルの哲学：不完全性定理と神の存在論』講談社現代新書 (1999).

[Tieszen 2002] Tieszen, R., "Gödel and the intuition of concepts," *Synthese*, **133** (2002), 363–391.

[戸田山 1998] 戸田山和久「実り豊かなリサーチ・プログラムとしての物理主義的数学論」,『哲学』, 49 (1998), 56–69.

[戸田山 2003] 戸田山和久「数の存在と数学とは何かをめぐる天使と悪魔の対話」,『Computer Today』, 2003 年 3 月号, 66–71.

[戸田山 2007a] 戸田山和久「「ゲーデルの数学的プラトニズム」とは何か」,『現代思想：総特集ゲーデル』青土社 (2007), 118–137.

[戸田山 2007b] 戸田山和久「ラッセル」in [飯田 2007], pp.198–276.

[van Atten and Kennedy 2003] van Atten, M. and Kennedy, J., "On the philosophical development of Kurt Gödel," *The Bulletin of Symbolic Logic*, **9** (2003), 425–476.

[Wang 1974] Wang, H., *From Mathematics to Philosophy*, Routldge & Kegan Paul (1974).

[Wang 1987] Wang, H., *Reflections on Kurt Gödel*, The MIT Press (1987). 邦訳：土屋俊・戸田山和久訳『ゲーデル再考：人と哲学』産業図書 (1995).

[Wang 1996] Wang, H., *A Logical Journey: From Gödel to Philosophy*, The MIT Press (1996).

[Wittgenstein 1922] Wittgenstein, L., *Tractatus Logico-Philosophicus*, Routledge & Kegan Paul (1922).

おわりに

予想をはるかに上回る好評をいただき，本シリーズの完結を迎えられたのは，編者として身に余る光栄である．そもそも学半ばの身の上で，このようなシリーズ企画の編集主幹を任され，ここにあとがきまで書くのは真におこがましいのだが，一言だけ読者へのメッセージを記しておきたい．

第1巻の「はじめに」に書いたことだが，本シリーズは入門書でも専門書でもなく，その橋渡しになる目的で編集されている．中間的なレベルというのは，中途半端と表裏一体である．なるべく広い視野を与えようと欲張った書き方をすれば，つい筆がすべってしまうリスクも高くなる．もちろん，そのようなことがないように十分心掛けたつもりであり，万一不備があれば編者としてその責任を言い逃れられるわけではない．しかし，このシリーズはあくまで現代ロジックへの跳躍台であり，読了後は各所で勧められている専門書を読むなり，専門家の指導を受けるなりして，もう一歩先の専門的な部分にも触れてほしいと願っている．

このシリーズを通して，私は自分の研究や考えについてはなるべく語らないようにしていたので，いつかまた別の機会に私の専門の周辺で皆さんと交流する機会が与えられることを祈りつつ，いったんこのシリーズの幕を下ろさせていただく．

2007年7月　編　者

用語索引

記 号

ア 行

カ　行

サ　行

タ　行

ナ 行

ハ 行

マ　行

ヤ　行

ラ　行

人名索引

ア 行

カ 行

サ 行

タ 行

ナ 行

ハ 行

マ 行

ラ 行

ワ 行

執筆者紹介（掲載順．*は編者）

田中一之*（たなか・かずゆき）[序]

1955 年生まれ．カリフォルニア大学バークレー校博士課程修了．現在，東北大学大学院理学研究科教授．Ph.D.
[主要著書]『数学基礎論講義：不完全性定理とその発展』（編著，日本評論社，1997），『逆数学と 2 階算術』（河合出版，1997），『数の体系と超準モデル』（裳華房，2002），『数学のロジックと集合論』（共著，培風館，2003）．

渕野　昌（ふちの・さかえ）[第 I 部]

1954 年生まれ．ベルリン自由大学数学科 Diplom 取得．現在，中部大学工学部理学教室教授．Dr.rer.nat.
[主要論文]
"On potential embedding and versions of Martin's axiom," *Notre Dame Journal of Logic*, **33**, no.4 (1992), 481–492.
"Set-theoretic aspects of nearly projective Boolean algebras," Appendix to: Nearly projective Boolean algebras, Lutz Heindorf and Leonid B. Shapiro, Springer Lecture Notes in Mathematics Vol.1596 (1994), 165–194.
"On the weak Freese-Nation property of $\mathcal{P}(\omega)$," Coauthors: Stefan Geschke and Lajos Soukup, Archive for Mathematical Logic, Vol.40 (2001), 425–435.

松原　洋（まつばら・よう）[第 II 部]

1956 年生まれ．カリフォルニア大学ロサンゼルス校博士課程修了．現在，名古屋大学大学院情報科学研究科教授．Ph.D.
[主要論文] "Nowhere presipitousness of the non-stationary ideal over $P_k\lambda$", *Journal of Mathematical Logic*, **2** (2002), 81–89（共著），"Strong ideals over $P_k\lambda$", *Foundamenta Mathematicae*, **174** (2002), 229–238.

戸田山和久（とだやま・かずひさ）[第 III 部]

1958 年生まれ．東京大学大学院人文科学研究科博士課程満期退学．現在，名古屋大学大学院情報科学研究科教授．
[主要著書]
『論理学をつくる』（名古屋大学出版会，2000），『知識の哲学』（産業図書，2002），『科学哲学の冒険—サイエンスの目的と方法をさぐる』（日本放送出版協会，2005）．



ゲーデルと 20 世紀の論理学(ロジック) ④

集合論とプラトニズム

2007 年 7 月 23 日　初版

[検印廃止]

編者　田中一之

発行所　財団法人　東京大学出版会

代表者　岡本和夫

113–8654 東京都文京区本郷 7–3–1 東大構内

電話 03–3811–8814　　Fax 03–3812–6958

振替 00160–6–59964

印刷所　三美印刷株式会社

製本所　矢嶋製本株式会社

ISBN978–4–13–064098–5

Printed in Japan

